# سحر أم ريّاضيات! ربما الاثنين معاً




**عندما تُصبح الأشياء غريبة مع المجاميع الجزئية**

قد تصير الأشياء غريبة جداً عندما نتعامل مع اللانهاية. خذ على سبيل المثال المجموع التالي:

$$S = 1-1+1-1+1-1+1-1+\dots$$

حول الصورة: صورة للعالم الإيطالي غراندي.

يُدعى هذا المجموع بسلسلة غراندي (**Grandi's series**) نسبةً إلى عالم الرياضيات والفيلسوف والكاهن الإيطالي جيدو غراندي (1671–1742). إذا رتبنا الحدود كالتالي:

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

من السهل أن ترى أن S يجب أن تكون مساوية للصفر لأن كل قوس فيها مساوٍ للصفر. مع ذلك، لا شيء يُوقفنا عن ترتيب الحدود بطريقة مختلفة، على سبيل المثال:

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots,$$

وفي هذه الحالة، يجب أن تكون S مساوية للواحد! وحتى هناك طريقة ثالثة لتقدير هذا المجموع. لنقل أنك كتبته كالتالي:

$$S = 0+1-1+1-1+1-1+\ldots$$

قُمنا بإضافة الصفر إلى البداية، وأتمنى أن توافقني على أننا لم نغير المجموع على الإطلاق. إذا ما كتبنا S لمرتين الآن:

$$S = 1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$$

$$S = 0+1-1+1-1+1-1+1-\ldots$$

وبعدها جمعناهما معاً، نحصل على:

$$S+S = 2S = (1+0)+(-1+1)+(1-1)+(-1+1)+\ldots$$

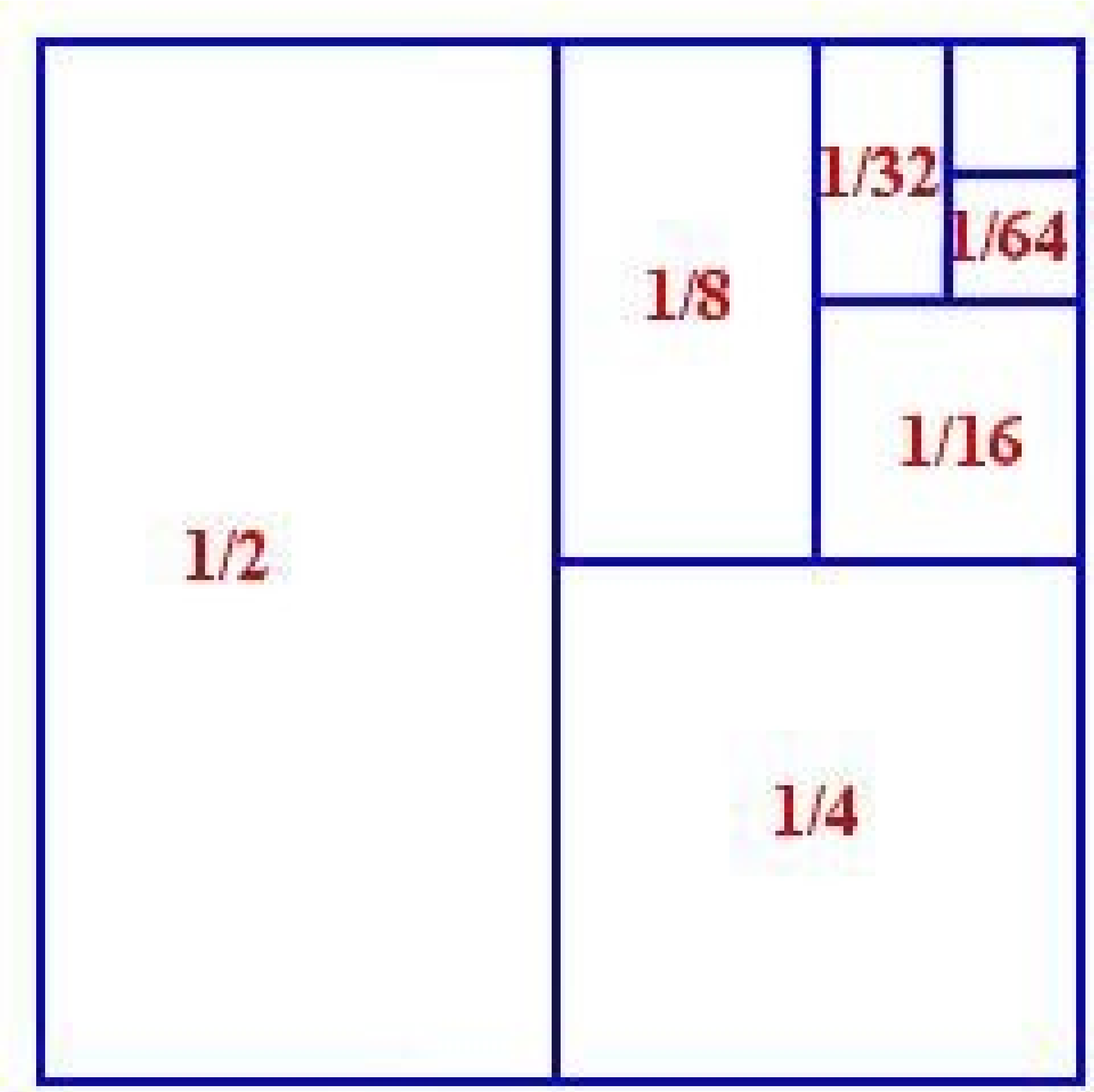
حسناً، يجب أن تكون 2S مساوية للواحد، مما يُعطينا أن S مساوية لنصف.

- **لانهائية لكنها مروضة**

كما تعرف، تُعرف المجاميع التي تحتوي عدداً لانهائياً من الحدود بالسلاسل اللانهائية (**infinite series**)، وهي تستطيع تحدي فهمنا للمفاهيم الرياضية الأساسية جداً مثل الجمع والطرح. خطوتنا التالية في استكشاف السلاسل اللانهائية هي السلسلة الهندسية التالية:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

هنالك طريقة ذكية لمعرفة قيمة هذا المجموع باستخدام المخطط التالي:




صورة توضيحية.

خذ مربع له ضلع طوله 1 وقسمه بالنصف لتحصل على مستطيلين لكلٍ منهما مساحة مساوية للنصف. الآن، قسم أحد المستطيلين إلى نصفين لتحصل على مربعين بمساحة 1/4 للمربع الواحد. قسم أحد هذين المربعين بالنصف وستحصل على مستطيلين مساحة كل منهما 1/8 واستمر بإجراء هذه العملية بشكلٍ لانهائي.

المساحة الكلية (لكافة المربعات والمستطيلات التي تركنها دون تقسيم) هي نفسها مجموع كل حدود السلسلة الهندسية، وتلك المساحة ما هي إلا مساحة المربع الكبير، وتظهر السلسلة الهندسية مساوية للواحد هنا.

في الواقع، يوافق علماء الرياضيات على هذا الأمر. ويقولون أنّ السلسلة تتقارب من الواحد. يُعرف التقارب (**convergence**) بشكلٍ

رسمي عبر النظر إلى سلسلة من المجاميع الجزئية:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

**الخ...**

تُعطينا المجاميع الجزئية سلسلة من الأرقام $\frac{1}{2} , \frac{3}{4} , \frac{7}{8} ,\frac{15}{16} ,...$، التي تصبح أقرب وأقرب من الواحد. في الحقيقة، تتقارب هذه الأرقام من الواحد كلّما قمنا بإضافة المزيد من الحدود. بشكلٍ عام، عندما تتقارب سلسلة من المجاميع الجزئية لسلسلة لانهائية من رقمٍ معين a، نقول أنّ السلسلة اللانهائية متقاربة من ذلك العدد.

لاحظ أن ذلك لا يحصل مع سلسلة غراندي في الأعلى، فالمجاميع الجزئية لها هي:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1-1=0$$

$$S_3 = 1-1+1=1$$

$$S_4 = 1-1+1-1=0$$

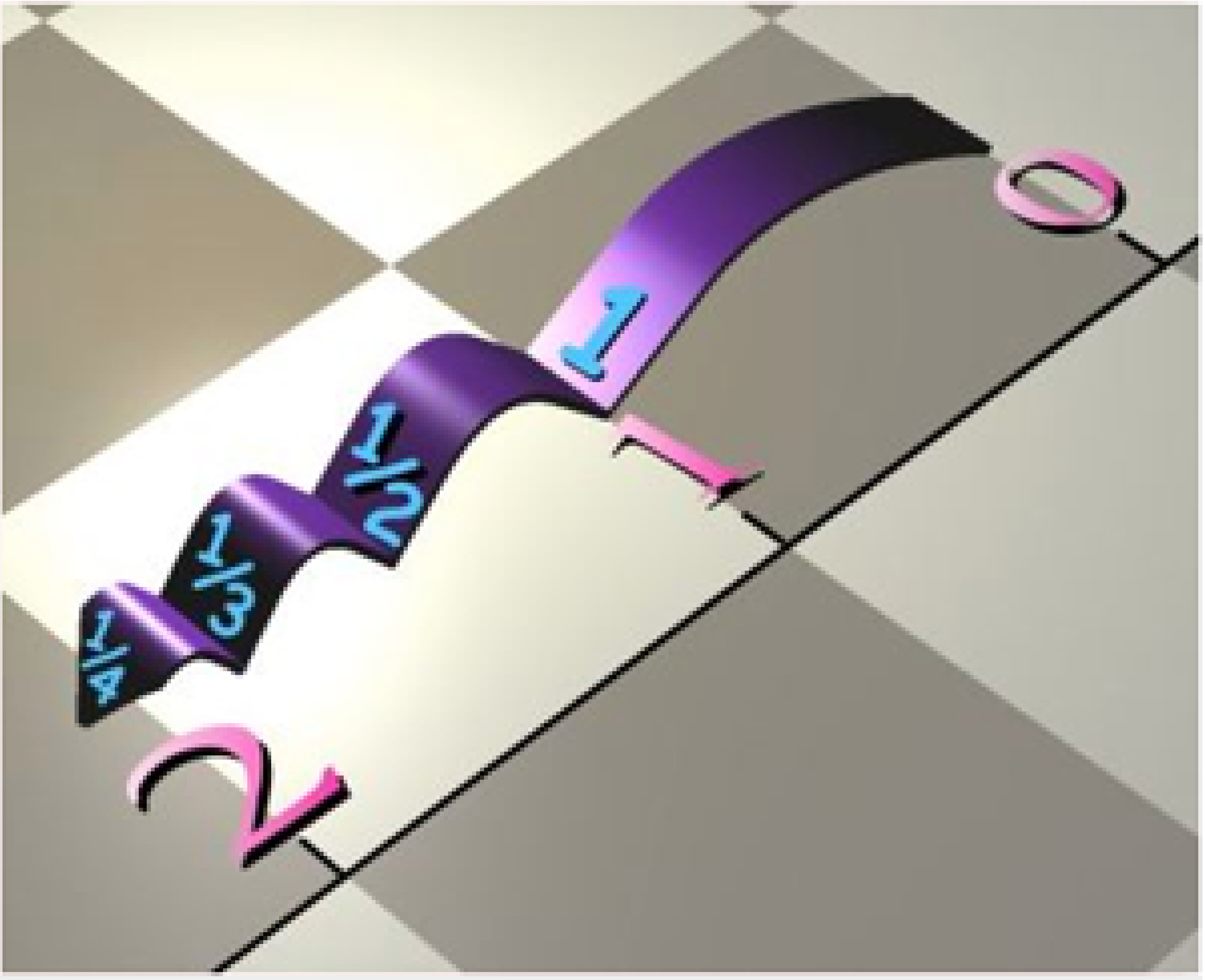
تتنقل المجاميع الجزئية وبشكلٍ أبدي بين 0 و1. إذاً، هي لا تتقارب من قيمة محددة، ولذلك لا توجد طريقة واضحة لإسناد قيمة معينة لتلك السلسلة.

- **اللانهائية والتباعد**

يبدو أنه من البديهي أن نجد السلسلة الموجودة في الأعلى متقاربة من الواحد، حيث أن الحدود المفردة للسلسلة $\frac{1}{2}, \frac{1}{4} , \frac{1}{8}$ تصير أصغر وأصغر. لذلك وعلى الرغم من قيامنا وبشكلٍ مستمر بإضافة أشياء تجعل من المجموع أكبر وأكبر، إلا أن الكميات التي نُضيفها تصبح أصغر بكثير، وليس من المفاجئ أبداً ألا تزيد عن 1. على أية حال، هذا النقاش خادع. دعنا ننظر إلى السلسلة التوافقية (**harmonic series**) التالية:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

بشكلٍ مشابه للسلسلة الهندسية التي درسناها سابقاً، تُصبح حدود السلسلة التوافقية أصغر وأصغر. لكنّ المفاجئ في الأمر، أن السلسلة التوافقية تتباعد، إذ أن الحدود الموجودة في المجاميع الجزئية تصير أكبر وأكبر، وفي النهاية تزيد كل الحدود.




تباعد السلاسل التوافقية.

إذا بدا ذلك الأمر من الصعب تصديقه، إليك البرهان بالنقض على تباعد السلسلة التوافقية. عند اعتمادنا على طريقة البرهان بالنقض، نبدأ بافتراض أن عكس ما نُريد إثباته صحيح، وبعدها نبرهن على أنّ ذلك يقود إلى تناقض.

إذا ما أردنا أن نبرهن على صحة العلاقة A، نبدأ بافتراض العكس: أي ان خطأ A صحيح. إذا قاد هذا الافتراض إلى تناقض، نؤكد بعدها أن خطأ A خاطئ، وبالتالي يجب أن تكون علاقتنا الأصلية A صحيحة. في هذه الحالة، نريد البرهان على أنّ السلسلة التوافقية متباعدة، ولذلك سنفرض أنها متقاربة من قيمة ما H.

نحن نعرف أن:

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5}>\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$$

لذلك إذا استبدلنا الكسور ذات المقام الفردي بتلك الأصغر منها، سنحصل على المتراجحة التالية:

$$H = 1+\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}+\frac{1}{7} +\frac{1}{8}+ \dots >$$

$$1+\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}+\frac{1}{8} +\frac{1}{8} + \dots$$

إذا ما جمعنا الآن تلك الكسور ذات المقام نفسه، نحصل على

$$H = 1+\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}+\frac{1}{7} +\frac{1}{8}+ \dots > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

في الجانب الأيمن، تظهر السلسلة التوافقية من جديد مضافاً إليها المقدار 1/2. وهذا يعني أن:

$$H > H+\frac{1}{2}$$

ونتيجةً للتناقض الذي حصلنا عليه جراء افتراضنا بأن السلاسل التوافقية متقاربة، نستنتج أن هذا الافتراض خاطئ، وبالتالي فإن السلاسل التوافقية لا تتقارب.

مع استمرار المجاميع الجزئية في أن تصبح أكبر وأكبر جراء إضافة زيادات أصغر وأصغر، تُشير الاحتمالية الوحيدة والأخرى الممكنة إلى أن المجاميع الجزئية تفوق كل الحدود، وليس كما هي الحال مع سلسلة غراندي، يعني ذلك أن H متباعدة.

- **اللانهائية والغموض**

تُصبح الأمور أكثر غموضاً بكثير عندما نناقش السلاسل التوافقية المتناوبة (**alternating harmonic series**)، المعرفة كما يلي:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

من الممكن البرهان على أن السلاسل التوافقية المتناوبة متقاربة من $\ln {2} \approx 0.7$. يُمكنك البرهان على ذلك باستخدام آلة حاسبة، أو إجراء حساباتك بالاعتماد على سلسلة تايلور $\ln {(x+1)}$ عند القيمة x=1.

إذاً، دعنا نبدأ بالحقيقة التالية:

$$\ln {2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

الآن دعنا نضربها بالعدد 2، نحصل على:

$$2\ln {2} = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6}+\frac{2}{7} - \frac{2}{8}\dots$$

إذا ما قمنا الآن بتبسيط الكسور بحيث تصبح كل الكسور ذات المقامات الفردية بين قوسين، وجمع الكسور التي تمتلك المقامات الفردية المتماثلة، نحصل على:

$$2\ln {2} = (2 - 1) - \frac{1}{2} + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} \dots$$

وبإزالة الأقواس

$$2\ln {2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

الجانب الأيمن هو السلسلة التوافقية المتناوبة، لذلك يبدو وكأننا برهنا العلاقة التالية:

$$2\ln {2} =\ln {2}$$

صورة لعالم الرياضيات برنارد ريمان

لكن، انتظر! لا بدَّ أنه هناك خطأ ما في عملنا. لقد وجدت الأمر صعب التصديق، لكن لا شيء خاطئ في الحقيقة. يُمكن شرح المفارقة بالاعتماد على حقيقة أنه عندما نُعيد ترتيب حدود السلسلة التوافقية المتناوبة، تتقارب السلسلة من قيمة مختلفة. يُمكن كتابة الجانب الأيمن من المعادلة (1) كالتالي:

ln {2} = (2 – 1) – \frac{1}{2} + \left( \frac{2}{3} – \frac{1}{3} \right) – \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} –\2)\ \frac{1}{5}\right) – \frac{1}{6} ... = 2\left(1 – \frac{1}{2} – \frac{1}{4} + \frac{1}{3} – \frac{1}{6} – \frac{1}{8} +

(\(\frac{1}{5} ... \right

وتنتج المشكلة عن حقيقة أنه في حين أنّ

(\ ... − {frac{1}{2} + \frac{1}{3} − \frac{1}{4} + \frac{1}{5\ − 1)\

تتقارب من ln 2، إلا أن السلسلة المعاد ترتيبها:

(\ ... {frac{1}{2} − \frac{1}{4} + \frac{1}{3} − \frac{1}{6} − \frac{1}{8} + \frac{1}{5\ − 1)\

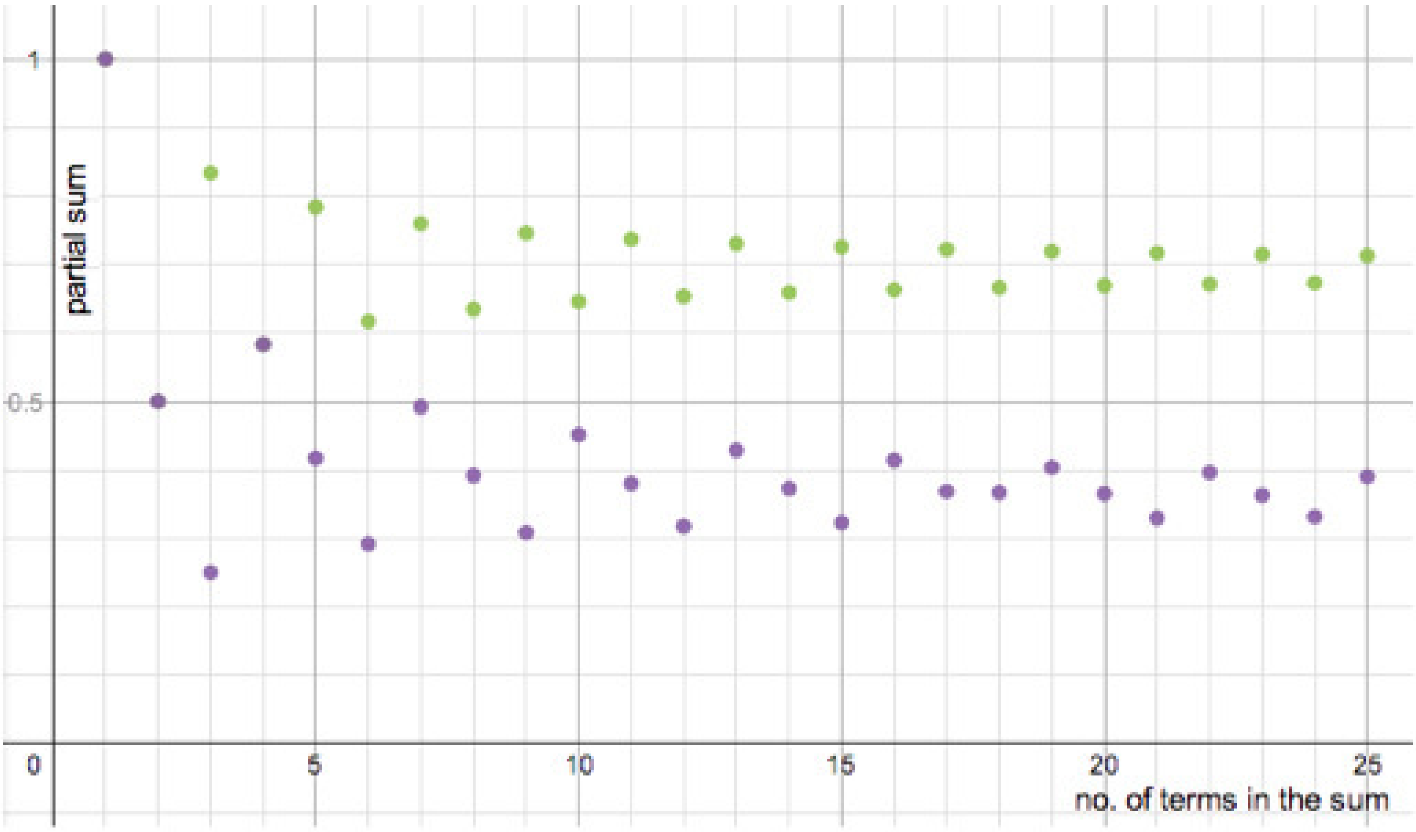
تتقارب من

(\{(ln {2}+\frac{1}{2}\ln {\left(\frac{1}{2}\right\)\

بصرف النظر عن حقيقة أن للسلسلتين الحدود نفسها تماماً!

دعنا نرى إن كان بإمكاننا تمثيل كل ذلك. في الصياغة التقليدية للسلسلة التوافقية المتناوبة، نبدأ مع 1 ونطرح نصف، وبعدها نضيف ثلث ونطرح الربع، وهكذا... ومع إضافتنا لكل حد، نقوم لاحقاً بطرح حد أيضاً. وفي الصياغة الثانية للسلسلة التوافقية المتناوبة، نطرح حدين بعد إضافتنا لكل حد. ما الذي سيحصل برأيك؟

يُوضح المخطط البياني في الأسفل ما سيحصل للمجاميع الجزئية عند إضافتنا للحدود. وهو يُمثل أول 25 مجموع جزئي. تُمثل النقاط الخضراء المجاميع الجزئية للسلسلة التوافقية المتناوبة التقليدية، والنقاط البنفسجية تُمثل المجاميع الجزئية للسلسلة المُعاد ترتيبها. يبرهن المخطط على أن السلسلتين ستتقاربان من قيمٍ مختلفة.




صورة توضيحية.

تبيّن أنه من خلال إعادة ترتيب السلسلة التوافقية المتناوبة، نستطيع جعلها تتقارب من أي قيمة نُريدها. حاول عمل ذلك بنفسك وما هي القيمة التي ستنتهي إليها السلسلة التالية:

+{S = 1 + \frac{1}{3} − \frac{1}{2}+ \frac{1}{5}+ \frac{1}{7} − \frac{1}{4}+ \frac{1}{9}+ \frac{1}{11}−\frac{1}{6)\
(\...

أخبرنا ذلك في تعليق 🙂

- التاريخ: 2015-05-27
- التصنيف: اسأل فلكي أو عالم فيزياء

#الكون #اللانهاية #الرياضيات #السلاسل

## المصادر

- كامبريدج
- الصورة

## المساهمون

- ترجمة
  - همام بيطار
- تصميم
  - عمار الكنعان
- نشر
  - همام بيطار