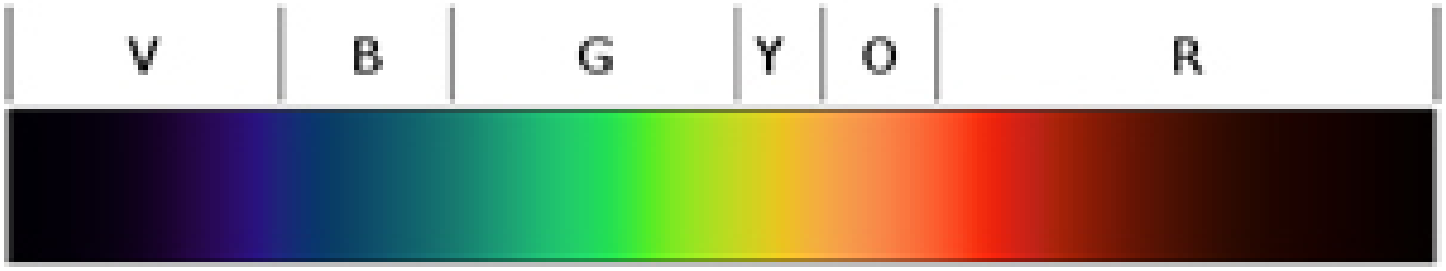
رياضيات قوس قزح



عندما فسر عالم الرياضيات الكبير اسحاق نيوتن ألوان قوس قزح بانكسار الضوء (refraction)، أصيب الشاعر جون كيتس بالذعر. تذمر كيتس (من خلال الشعر طبعا) من أن التفسير الرياضي سلب من هذه الغرائب الطبيعة سحرها، وقهر "كل الأسرار بالقاعدة والخط". لكن التفسير الرياضي، الذي يتطلب فقط الهندسة الأساسية للخطوط والدوائر، هو أنيق تماما مثل أقواس قزح نفسها، كما سنرى.

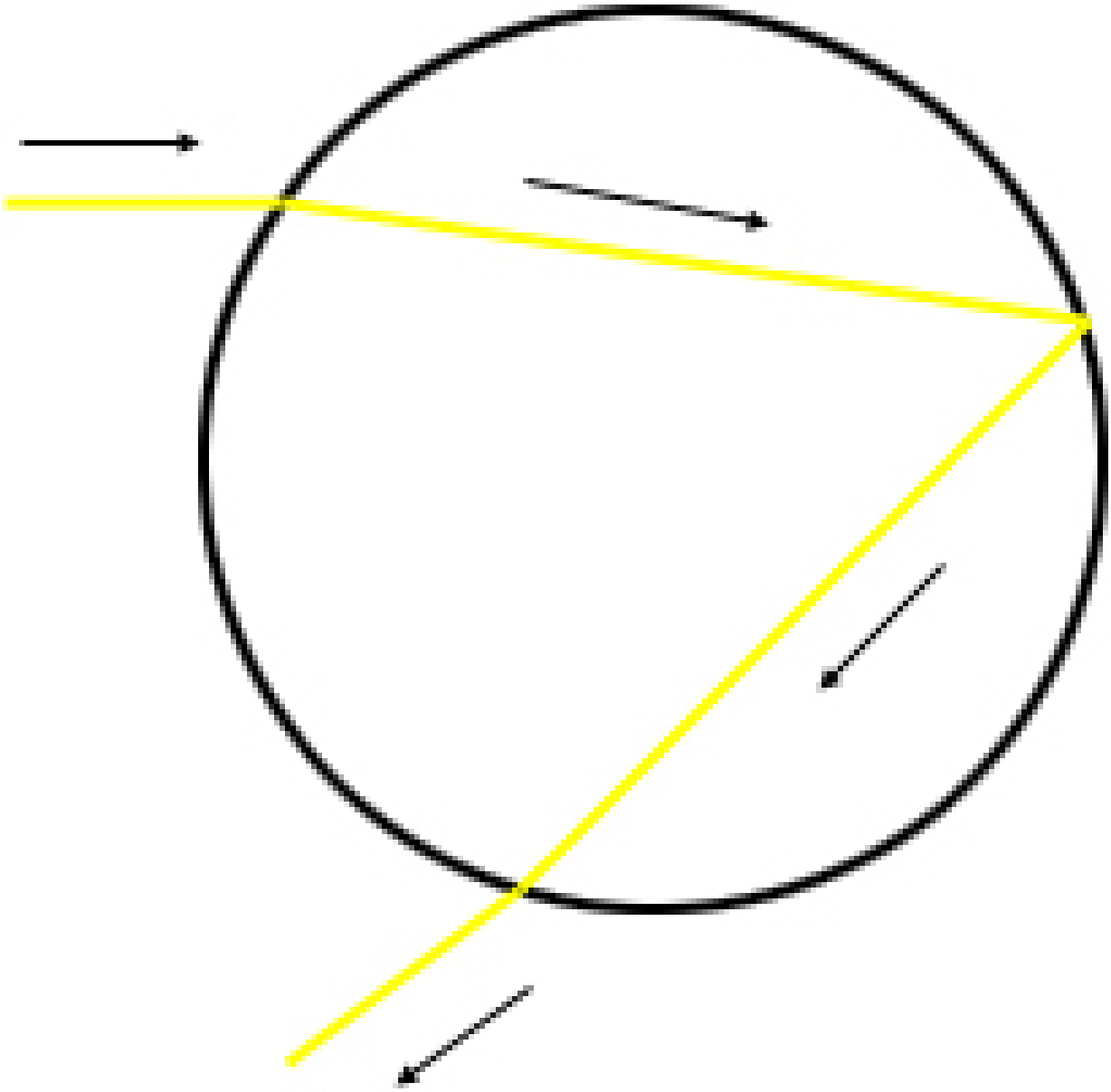
قائم على الانكسار



الطيف المرئي من البنفسجي (يسارا) إلى الأحمر (يمينا).

ألوان قوس قزح هي نتيجة انكسار يقسم الضوء إلى مكوناته الأساسية، تماما كما يحدث عندما يشع الضوء من خلال الموشور (**prism**). الضوء الأبيض الذي يصل من الشمس، هو مزيج من الموجات الكهرومغناطيسية ذات الترددات مختلفة. أنت ترى الأبيض عندما يصيب هذا المزيج من الترددات عينيك في نفس الوقت، ولكن عندما تلتقط عينيك موجة فردية بذاتها، فإنك تدرك لونا معينا.

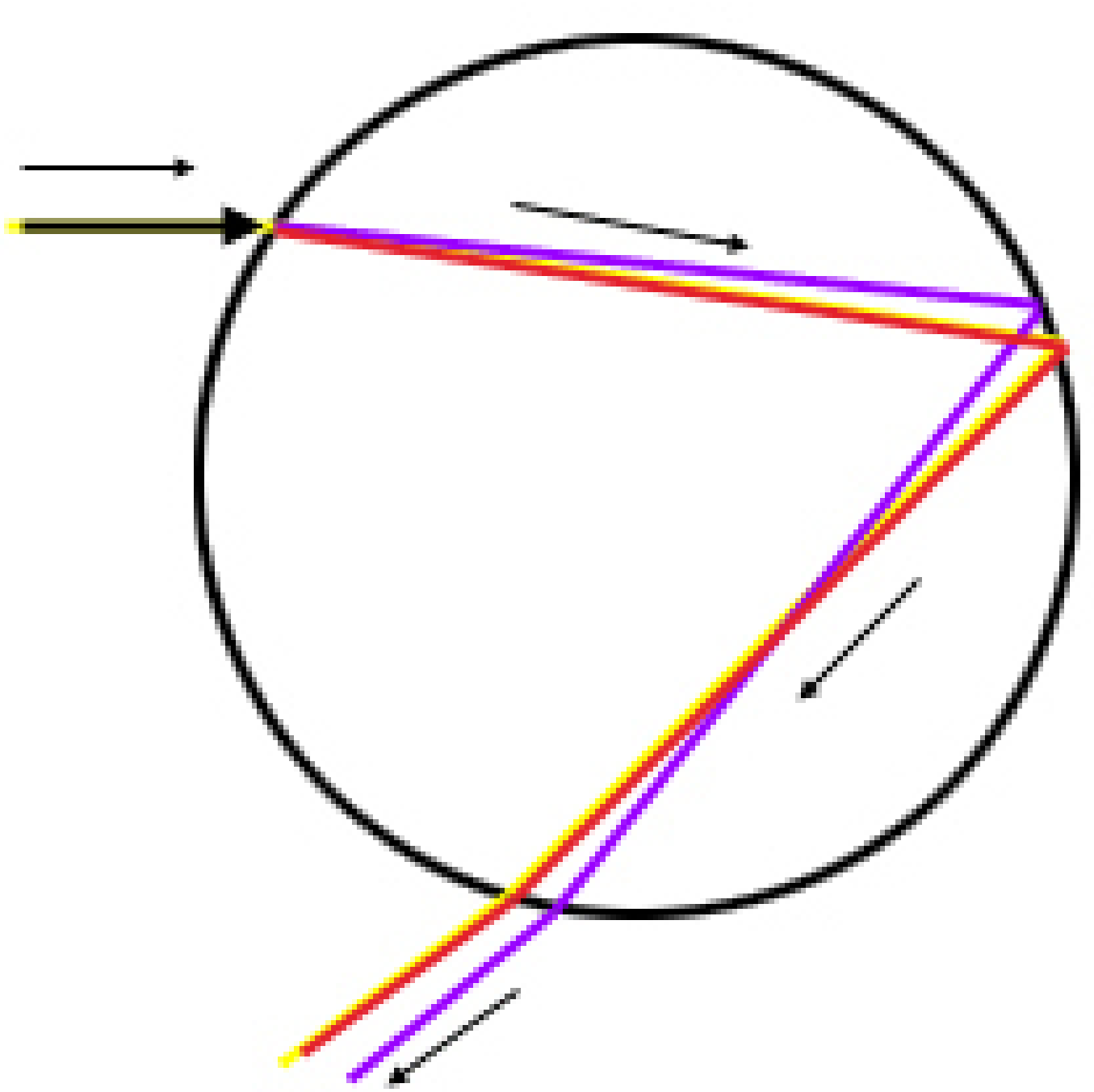
الموجات ذات الترددات بين حوالي 670 و780 تيرا هيرتز (**THz**) تُدرك كظلال من اللون البنفسجي. عند االنهاية الأخرى من الطيف، هناك موجات ذات ترددات بين حوالي 400 و480 تيرا هيرتز، تُدرك على أنها ظلال من اللون الأحمر. كل الألوان الأخرى تأتي من ترددات تقع بين هاتين الحزمتين. ولا يمكن أبدا إدراك الموجات الكهرومغناطيسية ذات الترددات الأخرى بالعين البشرية.



الشكل 1: شعاع من الضوء وهو يُكسر ثم يُعكس ثم يُكسر مرة أخرى.

عندما يصيب شعاع من ضوء الشمس قطرة ماء كروية، سينعكس (**reflected**) بعض منه بواسطة سطح القطرة، لكن بعضه الآخر سوف ينفذ إليها. في أثناء نفاذه، سينحني شعاع الضوء (**bent**) أو سينكسر. إنها نفس الظاهرة التي تشاهدها عندما تضع قصبة في كأس من الماء. ثم يستمر الشعاع إلى أن يضرب ظهر القطرة. سيخرج بعض الضوء، ولكن بعضه الآخر سوف يُعكس مرة أخرى ويغادر القطرة من الجانب الآخر ليُكسر مرة أخرى أثناء هذه العملية. **أنظر الشكل 1.**

الانكسار هو نتيجة لتباطوء شعاع الضوء أثناء مروره من وسط إلى آخر. على سبيل التشبيه الفج جدا، فكر في دفع عربة تسوق من الطريق إلى العشب بزاوية: ستغير العربة اتجاهها لأن جانبها الذي سيصل إلى العشب سوف يتباطأ أولا.



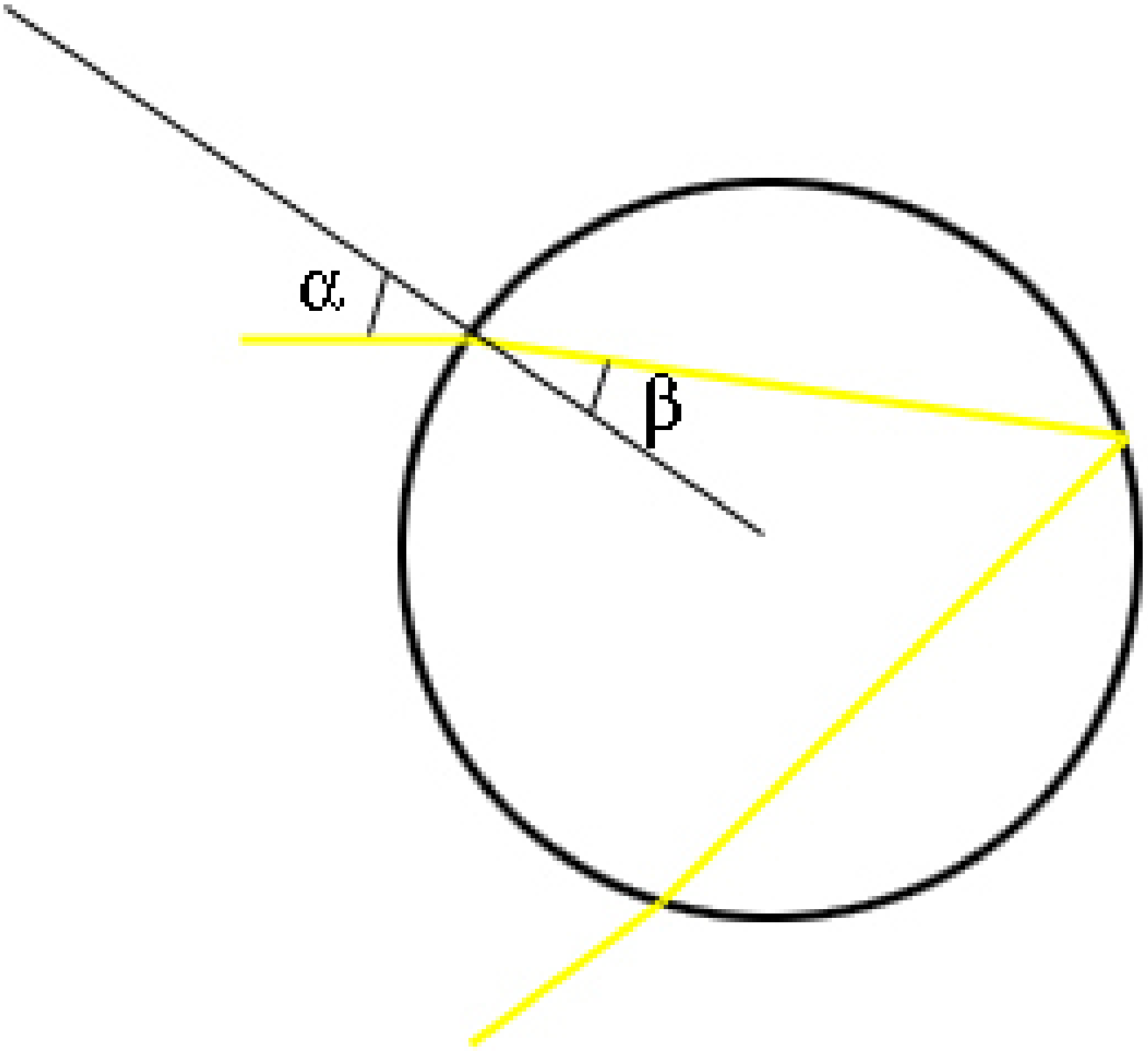
الشكل 2: ضوء ذو ترددات مختلفة ينكسر في كميات متفاوتة.

عندما يتنقل ضوء الشمس في فراغ (وبتقريب جيد جدا، خلال الهواء) تنتقل كل الترددات بنفس السرعة (\(c\))، ما يقارب 300،000 كم في الثانية. وخلال مرور شعاع الضوء في الماء، يبقى تردده،، وبالتالي لونه، كما هو. لكن سرعته ستتغير بمقدار يعتمد على التردد. وذلك لأن التركيب الذري للماء يتفاعل بشكل مختلف مع الموجات ذات الترددات المختلفة. مقياس تباطؤ الضوء ذو التردد (\(f\)) يُعطى بواسطة معامل الانكسار (\(n_{f,w}\)) (**refractive index**). وتعتمد قيمته ليس فقط على التردد ، بل أيضا على الوسط الذي يدخله الضوء (المياه في هذه الحالة، كما هو تبين "**اللاحقة السفلية**"(\(w\)) (**subscript**\)). ويُعرف المؤشر بأنه:

(\ {{n_{f,w}=\frac {\text{Speed of light in a vacuum}} {\text{Speed of light with frequency f in water)\

بالكاد يتغير معامل الانكسار (\(f\)) مع اختلاف التردد: يبلغ (\(n_{f,w}\)) حوالي 1.34 للنهاية البنفسجية من الطيف وحوالي 1.33

لنهايته الحمراء. ولكن هذا الاختلاف الصغير يكفي لتقسيم ضوء الشمس في طيف جميل من الألوان التي نراها في قوس قزح. (**أيضا يختلف معامل الانكسار قليلا مع درجة الحرارة، ولكن يمكننا تجاهل هذا الأمر هنا.**)



الشكل 3: يبين الرسم البياني المقطع العرضي لقطرة الماء التي تحتوي الشعاع الساقط والشعاع المنكسر والشعاع العادي. الزوايتين (α) و(β) مرتبطتين بواسطة "قانون سنيل" (Snell's law).

يصف قانون سنيل مقدار انحناء شعاع الضوء ذو الترددات المختلفة حين ينفذ إلى القطرة. وينص القانون على أن شعاع الضوء المنكسر يوجد في المستوي المكون من الشعاع الساقط (**incident ray**) والشعاع الناظم عند نقطة السقوط (**the normal at the point of incidence**) – الشعاع الناظم هو الخط الذي يمر عبر النقطة التي يصل فيها الشعاع إلى القطرة وهو عمودي على سطح القطرة. وبما أننا نفترض أن القطرة كروية، فإن الخط العامودي في هذه الحالة ما هو إلا نصف القطر الممتد (**extended radius**) للقطرة، الذي يربط مركزها بنقطة السقوط.

ويخبرنا قانون سنيل أيضا أن الزاوية التي ينكسر بها شعاع الضوء معطاة وفقا للمعادلة التالية

\{{frac {\sin \alpha} {\sin\beta}= \frac {n_{f,w}}{n_{f,a}\

حيث \(\alpha\)) و\(\beta\)) هما الزاويتين المبينتين على الشكل 3، وكل من \(n_{f,a}\)) و\(n_{f,w}\)) هما مؤشرا إنكسار الضوء ذو التردد \(f\)) في كل من الهواء والماء، على التوالي. وبما أن الهواء مشابه جدا للفراغ، فإن معامل الانكسار \(n_{f,a}\)) يكاد يساوي 1 لكل الترددات. وهكذا، إذا أصاب شعاع الضوء القطرة بحيث تساوي الزاوية \(45 (alpha درجة، فإن الضوء الأحمر ذو مؤشر الانكسار 1.33 لديه زاوية \(\beta\)) تبلغ

\ beta=arcsin \frac{ \sin 45°}{1.33}=32.12°\)\

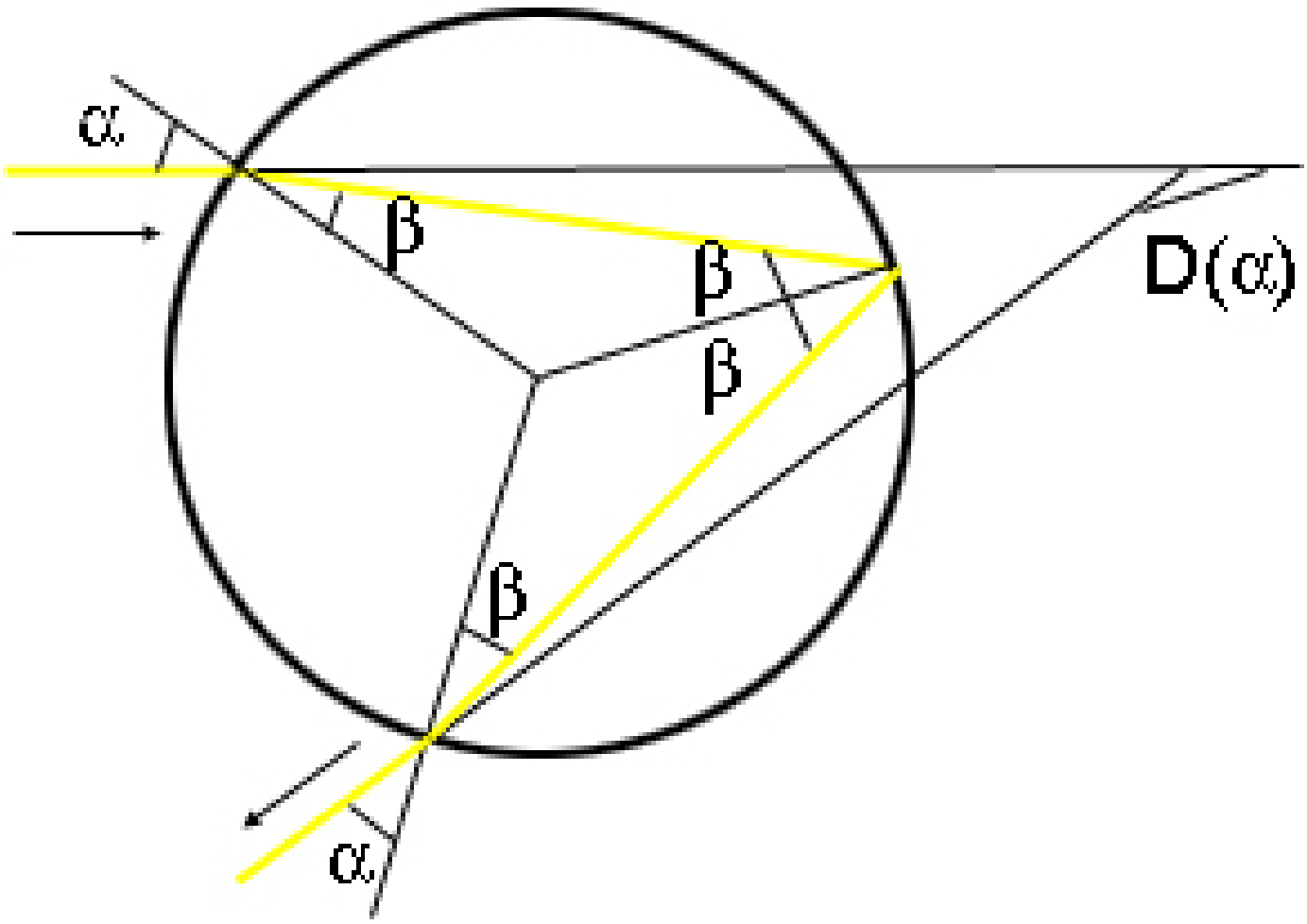
(قُربت النتيجة إلى منزلتين عشريتين.) الضوء بنفسجي ذو معامل انكسار يبلغ 1.34 لديه زاوية \(\beta\)) تبلغ

\ beta=arcsin \frac{ \sin 45°}{1.34}=31.85°\)\
إن زوايا الانكسار المختلفة للترددات المختلفة للضوء هذه هي ما يعطي قوس قزح ألوانه.

اصطياد أشعة قوس قزح

لكن، لماذا نرى كل لون من الألوان يشكل قوسا دائريا تاما؟ لتفهم شكل قوس قزح، فكر في ضوء الشمس وكأنه يهبط في أشعة متوازية ويضرب قطرة ماء معينة في الهواء. باستخدام قانون سنيل وقانون الانعكاس (**الذي ينص على أن زاوية السقوط تساوي زاوية الانعكاس**)، يمكننا استنباط مقدار انحرف شعاع بموجب الزاوية \(\alpha\)) التي ضرب فيها القطرة أول مرة. بعبارة أخرى، بموجب أي زاوية يتم تحويله في أثناء انكساره وانعكاسه ومن ثم انكساره مجددا (**انظر الشكل 4**). وبالطبع، هذه الزاوية ستكون مختلفة عند كل تردد أو لون للضوء.

بالتحديق مليا في الشكل 4، ستتمكن من اقناع نفسك بأن الانحراف \(D_f(\alpha)\)) معطى بواسطة المعادلة
\(D_f(\alpha)=(\alpha−\beta)+(180°−2\beta)+(\alpha−\beta)=180°+2\alpha−4\beta)\



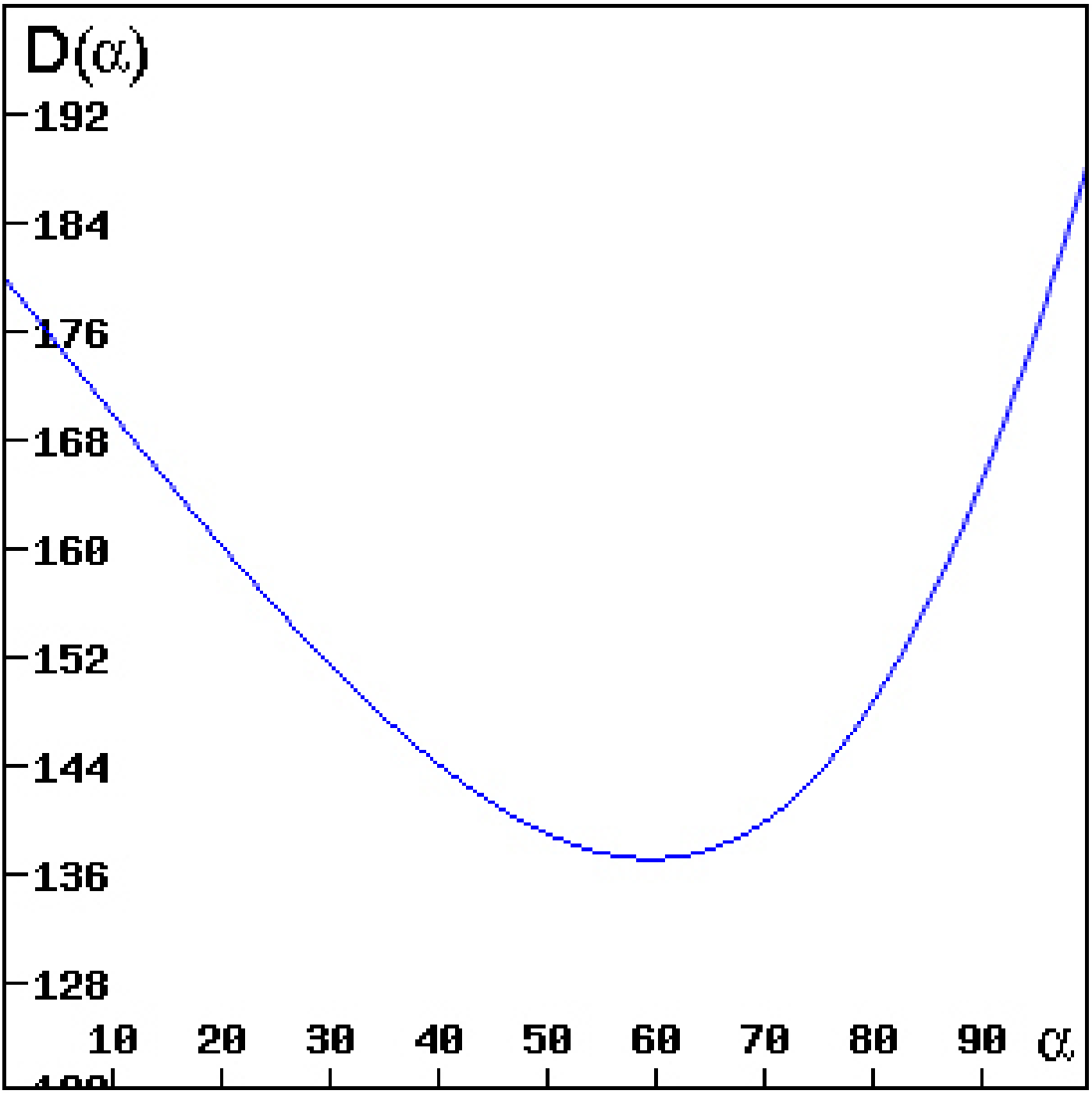
الشكل 4: استنباط زاوية الانحراف.

نعرف من قانون سنيل أننا نستطيع تعويض الزاوية (\(\beta\)) على النحو التالي

(\ {{beta=arcsin \frac {\sin \alpha} {n_{f,w}\)

في المعادلة أعلاه. (نحن هنا نعتبر أن معامل انكسار الهواء يساوي 1)

يبين الشكل 5 الخط البياني لـ (\(D_f(\alpha)\))، باعتبار معامل الإنكسار (\(n_{f,w}=1.33\)) لدرجة بعينها من اللون الأحمر. لاحظ أن لها نهاية صغرى (**minimum**) عند قيمة (\ {alpha_ {m\ )\)) في مكان ما من منطقة الـ (60°)



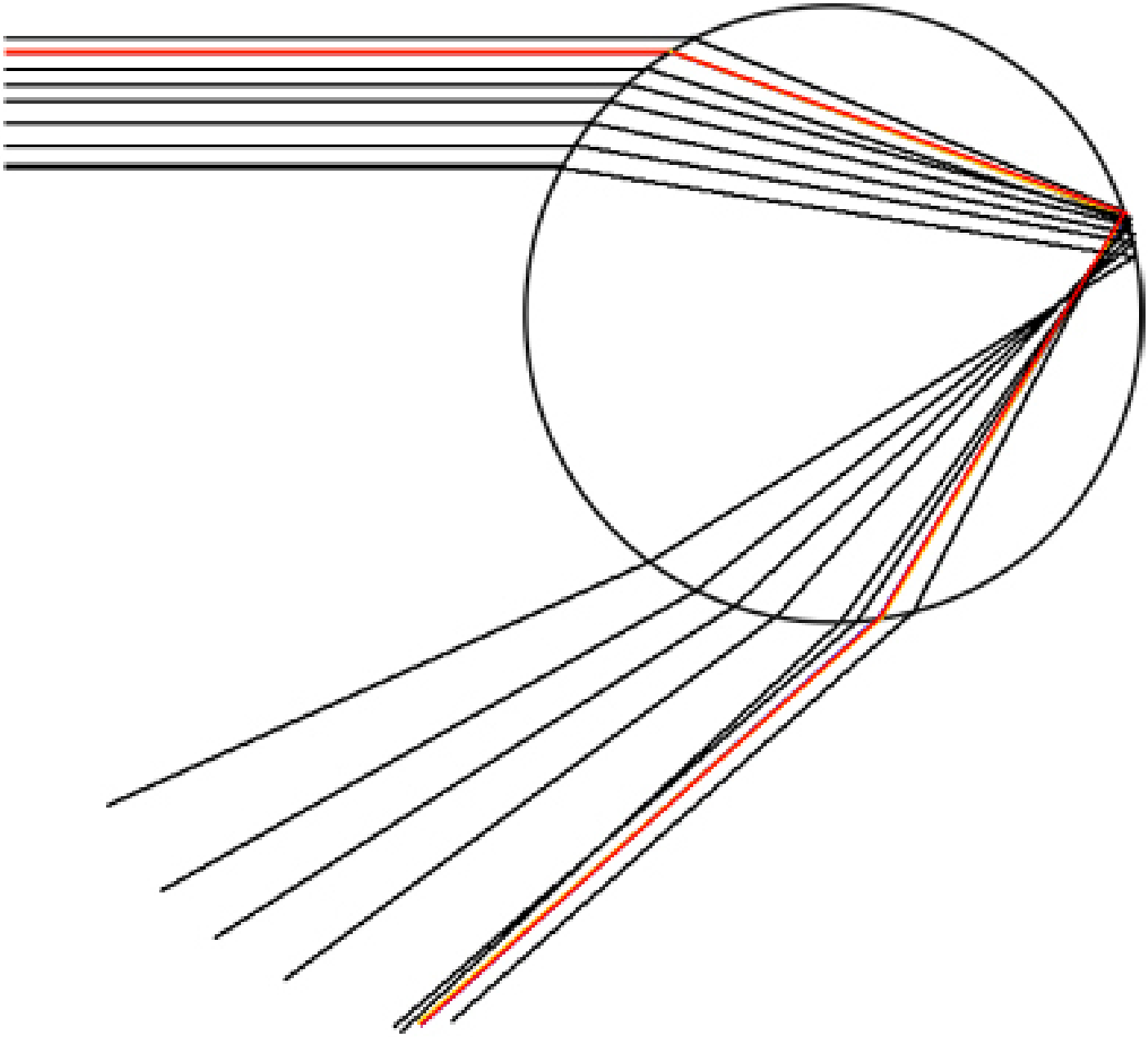
الشكل 5

الشكل 5: الخط البياني لـ \(D_f(\alpha)\)

هذه الزاوية الصغرى (\(\alpha_{m}\)) هي ما يعطينا قوس قزح. ويبين الشكل 6 مقطع عرضي ثنائي الأبعاد للقطرة التي تحتوي حزمة من الأشعة لمعامل الانكسار الخاص بنا وهو (\(n_{f,w}=1.33\)). الشعاع الذي يدخل الزاوية الصغرى (\(\alpha_{m}\)) في هذا المقطع العرضي مبين باللون الأحمر. وهو يسمى شعاع قوس قزح (**rainbow ray**).

تتكتل الأشعة التي أصابت القطرة بالقرب من شعاع قوس قزح (بزاوية قريبة من (\(\alpha_{m}\))) على مقربة منه أثناء مرورها خلال القطرة وعندما تنبثق منها. فإذا ما تمكنت عيناك من التقاط شعاع قوس قزح من هذه القطرة بعد أن انبثق، فسترى أيضا مجموعة كاملة

من الأشعة الأخرى، ما يجعل الضوء الصادر عن قطرتنا فاقع بشكل خاص. وبما أن كل الاشعة المتكتلة من نفس اللون، وهو درجتنا المعينة من اللون الأحمر التي تساوي \(n_{f,w}=1.33\)، فإن القطرة ستضيء في السماء باللون الأحمر.

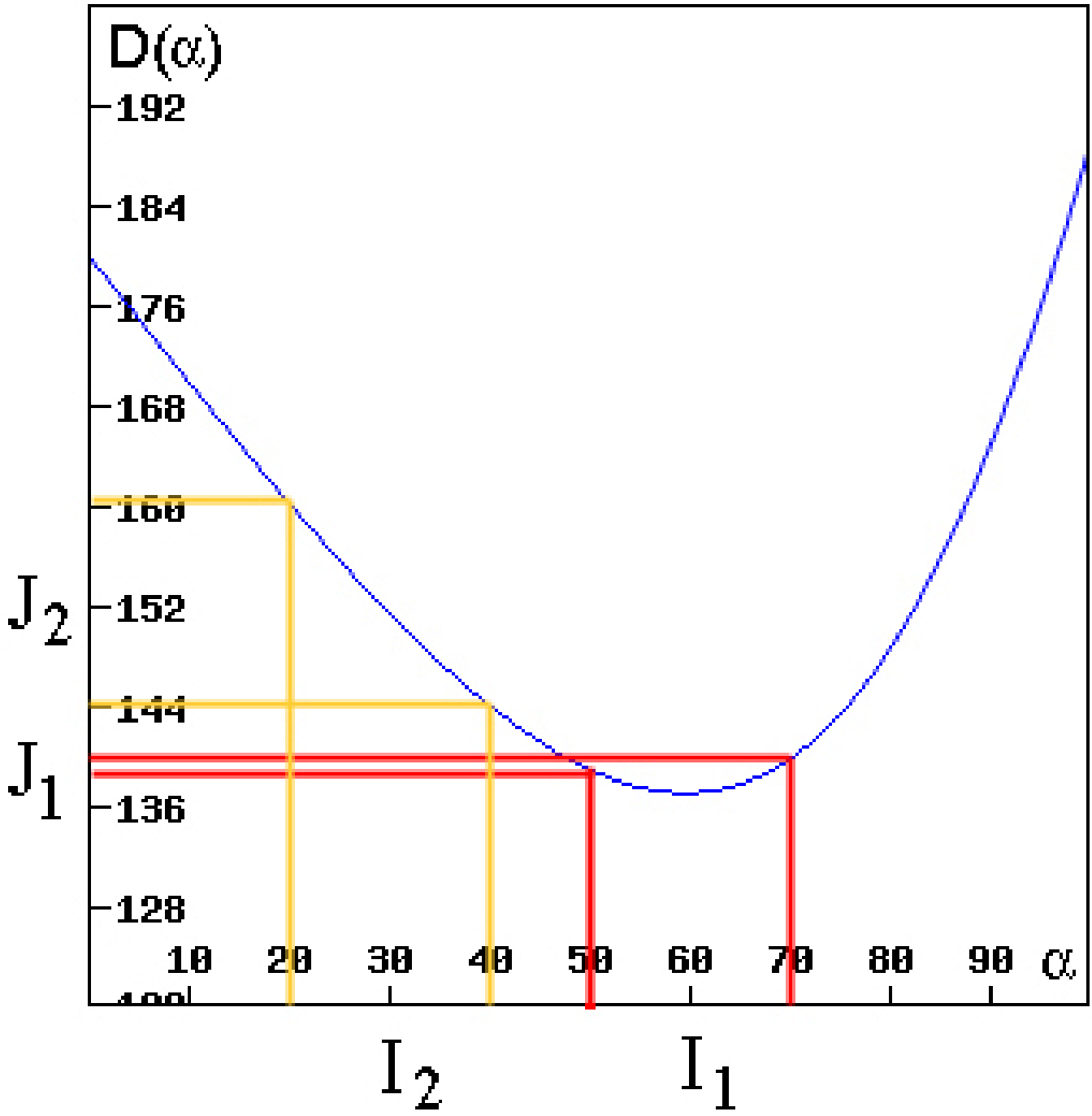


الشكل 6: شعاع قوس قزح مبين باللون الأحمر. تنبثق كتلة من الأشعة من القطرة بالقرب من شعاع قوس قزح، بينما تبدو الأشعة التي انبثقت من مكان آخر أكثر تباعدا.

إن حقيقة أن كتلة الأشعة الحمراء المنبثقة بالقرب من شعاع قوس قزح، هي نتيجة كون \(\alpha_{m}\) النهاية الصغرى للدالة **function** \(D_f(\alpha)\). يمكنك ان ترى هذا على الشكل 7. خذ الفترة \(l_1\) المرتكزة على النهائية الصغرى والفترة \(l_2\) ذات نفس العرض والمرتكزة على مكان آخر. سيكون نطاق زوايا انحراف **deviation angles** قيم \(l_1\) المعطاة بموجب الفترة \(L_1\) أصغر كثيرا من نطاق زوايا انحراف قيم \(l_2\) المعطاة بموجب الفترة \(L_2\). وهكذا، فإن الأشعة التي تصيب القطرة بالزوايا \(\alpha\) في \(l_1\) تلتصق بالقرب ببعضها البعض أكثر من الأشعة ذات الزوايا \(\alpha\) في

\(l_1\)).

إذا كنت لا تصدق الصورة، هاك دليل على ذلك



الشكل 7

الشكل 7: الفترة \(l_1\) أصغر من الفترة \(l_2\)

مخاريط اللون

إذن، أنت ترى نقطة حمراء في السماء لكل قطرة تتمكن عينيك من التقاط شعاع قوس قزح أحمر منبثق عنها. لكي ترى في أي موقع من السماء تصبح هذه قطرات ذات صلة بك، دعنا أولا نستنبط القيمة الدقيقة لـ (\ {alpha_ {m\ )\ )). إن حل (\ frac{dD _f\ )\ {(\alpha)}{d\alpha)\ ) للعثور على الحد الأدنى يعطي

(\{{alpha_ {m} =arccos \sqrt{\frac {n^2_{f,w}-1}{3\ )\

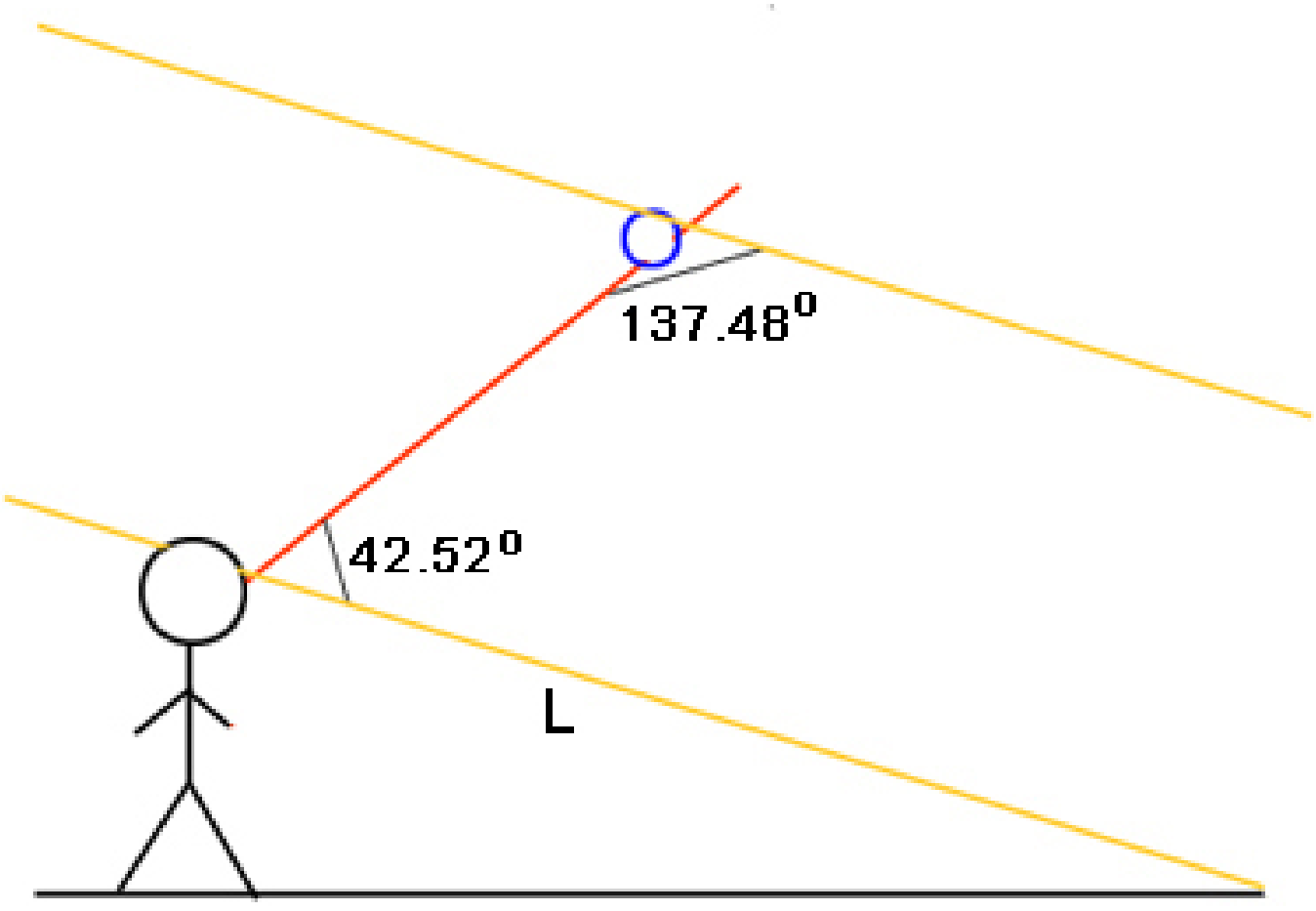
انظر هنا لمزيد من التفاصيل.

والتعويض بـ \(n_{f,w}=1.33\) (لدرجتنا المعينة من اللون الأحمر) يعطي

(\alpha_ {m} =59.58°\ )\

(\D_f(\alpha m)=137.48°)\

الآن، إذا التقت عيناك شعاع قوس قزح المنبثق عن قطرة، فهذا يعني أن الشعاع المنبثق يشكل الزاوية (\rf=180°-137.48°=42.52°)\) مع الخط (L) المبين على الشكل 8. إنه الخط الذي تحصل عليه من مد شعاع ضوء الشمس الذي سيمر مباشرة من خلال عينيك لو لم تعترض رأسك الطريق. (تذكر أننا نفترض أن الأشعة القادمة من الشمس متوازية). لنسمي (\rf)\) زاوية قوس قزح. يعتمد ذلك، طبعا، على التردد (\f)\)، وبالتالي على اللون.

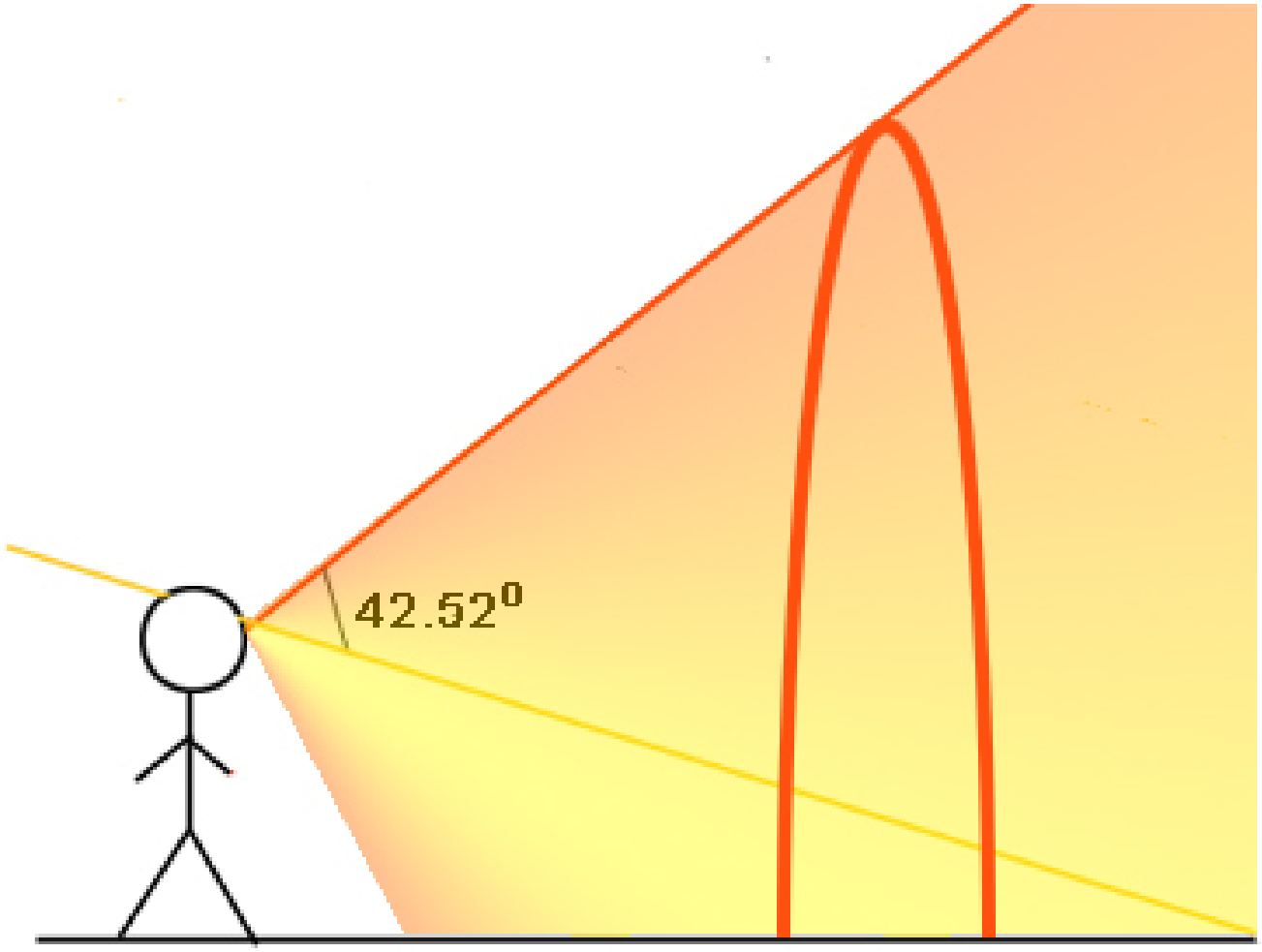


الشكل 8: شعاع قوس قزح المنحرف عن قطرتك يشكل زاوية تبلغ 42.52 درجة مع الخط (L).

إذا أخذت كل الخطوط التي تنبعث من عينيك وشكلت بها زاوية قدرها 42.52 درجة مع الخط (L)، فإنك ستحصل على مخروط (**انظر الشكل 9**). تكمن كل القطرات التي تضيء لك بالأحمر على هذا المخروط: إن لم تفعل القطرات ذلك، فإنك لن تتمكن من التقاط شعاع قوس قزح الأحمر الخاص بها.

ولكن عندما تنظر إلى امتداد سطح مخروط من قمته، كما تفعل عيناك، فكل ما ستراه هو دائرة. تستطيع أن تجرب هذا بلف ورقة في شكل مخروط والتحديق فيها عبر الثقب الصغير على قمتها. يأتي قوس قزح من قطرات تكمن على المخروط وعلى مسافات مختلفة من عينيك، يمكن أن تكون بعضها قريبا وبعضها الآخر بعيدا.

ولكن عينيك لا تستطيعان تمييز المسافات، وكل ما ترياه هو الضوء الأحمر ممتزجا بعضه ببعض ليشكل قوسا دائريا يبدو وكأنه يقع في مكان ما على مبعدة. السبب في عدم رؤيتك الدائرة الكاملة، هو أن الأرض تعترض الطريق. ولن تتمكن من رؤية قوس قزح دائري جميل، إلا في حالة ما إذا كنت فوق قطرات الماء، على سبيل المثال عندما تنظر إلى الأسفل من الطائرة.



الشكل 9: القطرات التي تراها تضيء في السماء تكمن على سطح مخروط.

يسري نفس الاستدلال على كل ألوان الطيف الأخرى: كلها تظهر كأقواس دائرية. لكن الأسس (**indices**) المتفاوتة للانكسار تعطي زاوية قوس قزح مختلفة لكل لون. على سبيل المثال، الضوء البنفسجي بـ (\(n_{f,w}=1.34\)) يعطي (\(\alpha_{m} =90.0^\circ\)).

و(\(D_f(\alpha m)=138.93°\))، وبالتالي فإن زاوية قوس قزح في هذه الحالة هي 41.07 درجة. لذلك، يبدو قوس قزح بمثابة تسلسل متداخل من دوائر الألوان وفق تراتب أسس انكسارها، أو، بقدر مساو، وفق تراتب تردداتها: من الأحمر في الأعلى ووصولا إلى البنفسجي في القاع.

علاوة على ذلك، يبين هذا التفسير لماذا لا ترى قوس قزح قط، إلا إذا كنت تقف وظهرك للشمس: هذه هي الطريقة الوحيدة التي تمكنك من التقاط أشعة قوس قزح القادمة من القطرات. كما إنه يفسر لماذا تبدو السماء تحت قوس قزح أكثر إشراقا من أعلاه. بما أن الغالبية العظمى من الأشعة التي تغادر القطرة تفعل ذلك من فوق شعاع قوس قزح (**انظر الشكل 6**)، فلن تستطيع التقاط أي أشعة من القطرات الموجودة "فوق" قوس قزح (**أي خارج مخاريط الألوان المختلفة**).

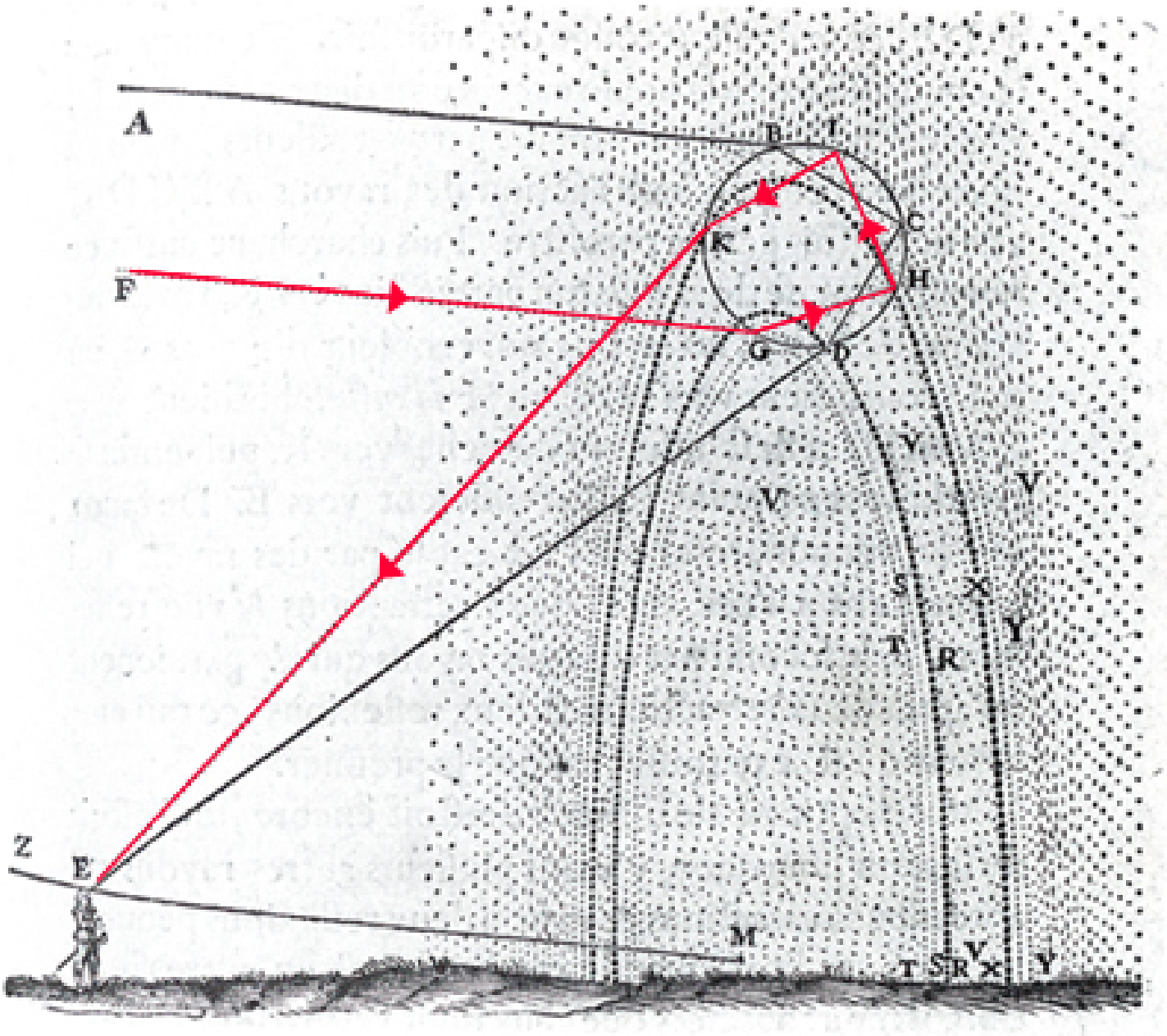
لذا، فإنك لن ترى أي ضوء منعكس من هذه القطرات. على الرغم ذلك، تلتقط عيناك الضوء المنعكس من القطرات الموجودة "تحت" قوس قزح (**القطرات التي تقبع داخل المخاريط**)، وهذا هو الضوء الذي يجعل السماء تحت قوس قزح تبدو أكثر إشراقا. إنها تبدو كضوء أبيض، لأن الأشعة غير القزحية (**non-rainbow rays**) للألوان المختلفة، التي تصل عينيك من قطرات مختلفة، تختلط معا.

كذلك، تبين هندسة قوس قزح أن أي قوس قزح تراه هو قوسك، وقوسك وحدك: أيا كان ما قد يراه شخص واقف إلى جانبك، فإنه سيأتي من مجموعة مختلفة من قطرات الماء، ولذلك فإنه سيكون قوس قزح مختلف.



قوس قزح

في بعض الأحيان، إذا كنت محظوظا، فقد ترى قوس قزح ثانٍ أبهت قليلا فوق القوس الرئيسي. قوس قزح الثانوي هو نتيجة لانعكاس أشعة الضوء مرتين داخل قطرات الماء. زوايا قوس قزح للألوان المختلفة في هذه الحالة هي حوالي 51 درجة، وهذا هو السبب في مشاهدة قوس قزح الثانوي في موقع أعلى في السماء. والانعكاس المزدوج يعني أيضا أن ألوان قوس قزح الثانوي تظهر في تراتب عكسي، من البنفسجي في الأسفل إلى الأحمر في الأعلى. ها هنا مخطط رينيه ديكاردت الأصلي الذي يبين كل من قوس قزح الابتدائي والثانوي. والانعكاس المزدوج المناظر لقوس قزح الثانوي مخطط باللون الأحمر.



مخطط ديكارت لكل من قوس قزح الابتدائي والثانوي.

بل إنه حتى من الممكن نظريا (على الرغم من أن ذلك مما يندر حدوثه فعليا) رؤية قوس قزح قادما من ثلاثة انعكاسات أو أربعة أو أكثر داخل القطرات. ولكني سأترك هذه الحسابات لك.

- التاريخ: 2016-02-14
- التصنيف: أسئلة كُبرى

#انكسار الضوء #أقواس قزح #ألوان قوس قزح #قانون سنيل

المصطلحات

- **هرتز (Hz)**: وهي الواحدة الدولية للتردد، وتُعرف على أنها تردد دورة واحدة خلال الثانية الواحدة. المصدر: ناسا

المصادر

- plus.maths
- الصورة

المساهمون

- ترجمة
  - هدى الدخيل
- مُراجعة
  - همام بيطار
- تصميم
  - علي كاظم
- نشر
  - مي الشاهد