البحث عن اللانهاية: الجزء الأول

بديهية الاصطفاء

هذه المقالة هي النصف الأول من مقال من جزأين (الجزء الثاني) يروي قصة معضلتين في الرياضيات ورجلان هما جورج كانتور **Georg Cantor** مكتشف العالم الغريب الذي تتواجد فيه هاتان المعضلتان، وبول كوهين **Paul Cohen** (الذي توفي السنة الماضية) وهو من توصلّ أخيراً لحلّهما. أولى المعضلتين ـبديهية الاصطفاء (**axiom of choice**)ـ هي موضوع هذه المقالة فيما تُعنى المقالة الثانية باستكشاف ما يعرف بفرضية الاستمرارية (**continuum hypothesis**)، وكلّ من المقالتين مستقلة بذاتها فليست هناك حاجة لقراءة كليهما حتى تكتمل الصورة.

جورج كانتور: مُطابق اللانهايات

جورج كانتور هو عالم منطق ألماني حقق في أواخر القرن التاسع عشر إنجازاً كان في السابق مجرّد حلمٍ بالنسبة للعلماء والفلاسفة واللاهوتيين وهو تقديم تحليلٌ مفصّل للانهاية. لكنّ عواقب ذلك النصر لم تكن محمودةً بالنسبة لكانتور شخصياً، فقد أصيب بالهوس والتعاسة جراء فشله في حل إحدى المسائل التي تكشّفت عن إنجازه وهي فرضية الاستمرارية. تزامن هذا العجز مع مأساة شخصية وهي وفاة ابنه، إضافة لإهانته من قبل العامة بسبب نبذ عمله كونه "سابق لعصره بمئة عام"؛ فأمضى كانتور السنوات الأخيرة من حياته ما بين دخول المصحات والخروج منها.

جورج كانتور

ينصّ اكتشاف كانتور على أنّ اللانهاية ليست واحدة بل ثمة سلسة لا نهائية من اللانهايات وكل واحدة أكبر من سابقتها. تبدو هذه الفكرة مربكة للعقل لكن المفاجئ أن المدخل لهذا العالم الغريب عبارة عن مفهوم بسيط ومألوف.

على فرض أن لديك مجموعتان من الأغراض ولنسمّهما المجموعة **A** والمجموعة **B**، كيف ستميّز أيهما الأكبر أو إن كانت الاثنتان متماثلتا العدد؟ كل ما ستقوم به بالطبع هو عدّ محتويات المجموعة **A** ومن ثمّ عدّ محتويات المجموعة **B** ومقارنة العددين. لكن قد يكون من الأسهل لتجنّب مخاطرة التوه أثناء العدّ أن نجرب مطابقة المجموعتين فنشكل أزواجاً من أغراض المجموعة **A** مع أغراض المجموعة **B** إلى أن تنفد الأغراض من إحدى المجموعتين، عندها تكون المجموعات التي تنجح مطابقتها متماثلة العدد أما المجموعات الأخرى فهي مختلفة الأعداد.

يكاد يكون هذا هو التبسيط الأمثل لكنّ هذه الفكرة أفسحت المجال لاكتشاف غير عادي على يد كانتور فقد أثبت عدم إمكانية مطابقة بعض المجموعات اللامنتهية مع مجموعات أخرى، لذا يجدر بنا أن نخلص على الفور إلى وجود مستوياتٍ مختلفة من اللانهاية بعضها أكبر من الآخر. (يمكنك معرفة المزيد عن عواقب تلك الفكرة في الجزء الثاني من المقال: فرضية الاستمرارية).

المجموعات والسياسة

بمجرّد أن أطلق كانتور العنان للخوض في مجال اللانهايات، أثار موضوعه الجديد نظرية المجموعات الحماس والشكوك على نحوٍ موازٍ، فقد أسهم جهده الخاص إضافة لجهد هنري ليبيزغ **Henri Lebesgue** في شملها على الفور ضمن بعض المواد الهامة السائدة كالتحليل والهندسة. وفي ذات الوقت بدا الاعتقاد بوجود مستويات مختلفة من اللانهاية بالنسبة لبعض الناس منافياً لفطرة الإنسان، حتى أن كانتور نفسه قال عن إحدى نتائجه المنافية للفطرة: "إنني أراها لكني لا أصدقها". لعلّ ذلك يسهل فهم نفور العديد من أفراد المجتمع الرياضيّ من تقبّل هذه الأفكار الجديدة الغريبة.

من المشككين الرئيسيين كان ليوبولد كرونيكر **Leopold Kronecker**، وهو من الصفائيين الذين يؤمنون بأن الرياضيات الحقيقية لا يمكن بلوغها إلا انطلاقاً من الأعداد الصحيحة ضمن مجموعة منتهية من المراحل، وكل ما تبقّى بالنسبة له محض وهم وخيال؛ وقد لخّص موقفه هذا في قوله: "**لقد خلق الله الأعداد الصحيحة وكل شيء سواها من صنع البشر**".

بالنسبة له كان كانتور يعمل بحرية زائدة عن الحدّ اعتماداً على مفاهيم لا أساس لها، فبينما لجأ كانتور للتعميم بشأن المطابقات النظرية للمجموعات النظرية، كان كرونيكر يثق فقط بمطابقات محددة بين المجموعات التي أمكنه تدوينها وفهمها. وذهب كرونيكر أبعد من ذلك للتنديد بكانتور بوصفه "**دجّال العلم**" و"**مفسد جيل الشباب**"، وكان أحد عدة علماء رياضيات مؤثرين ممن عارضوا عمله، حتى صديق كانتور ماغنوس ميتاغ ليفلر محرر صحيفة "آكتا ماثماتيكا" المرموقة أقنعه بسحب عمله من النشر بصفته "سابق لعصره بقرن".

المفارقات والبديهيات

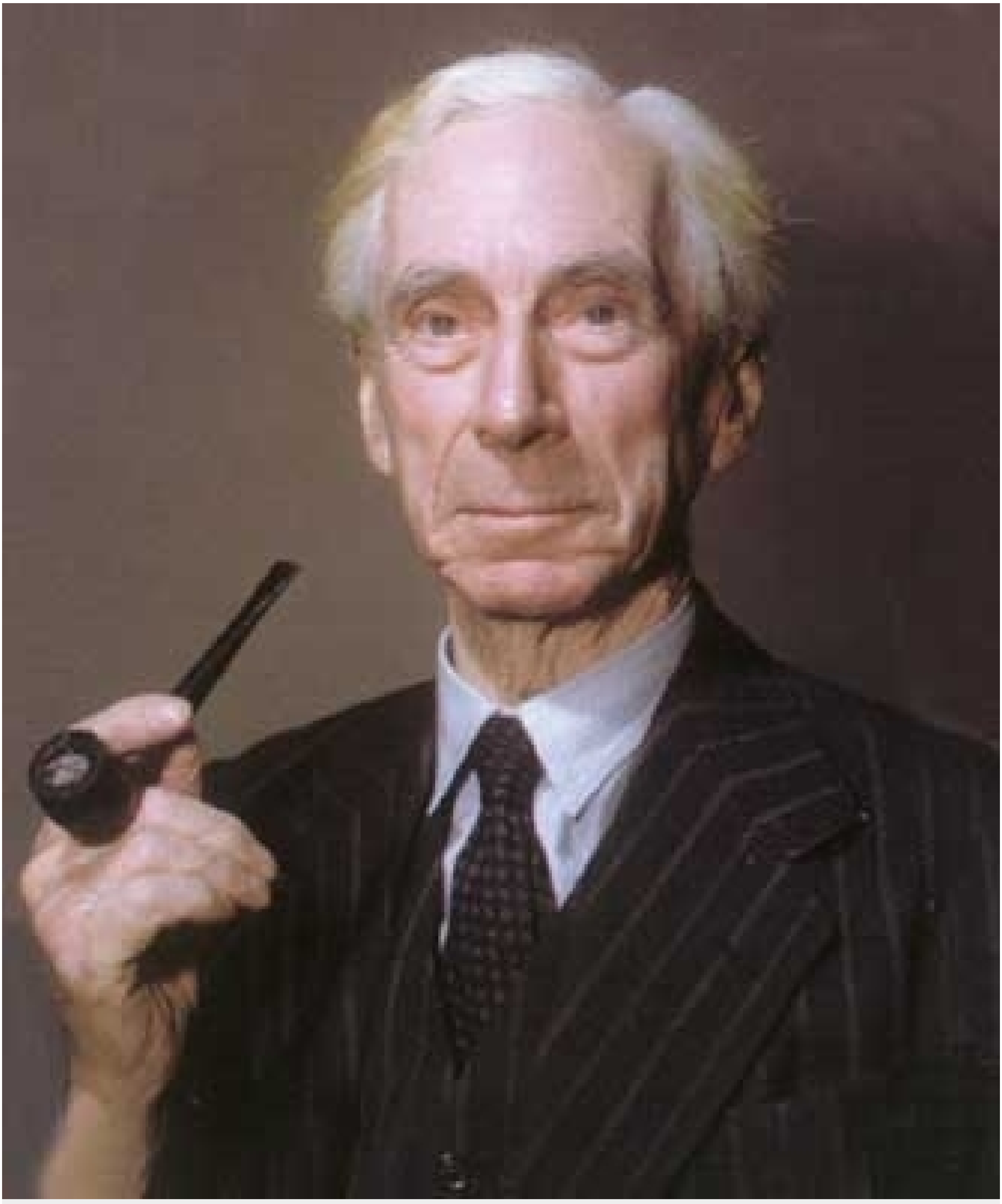
بالمقابل وُجد علماء آخرون أكثر تقبّلاً لأفكار كانتور، حيث كان مصدر إلهام لعالمي المنطق غوتلوب فيرج **Gottlob Frege** وبيرتراند راسل **Bertrand Russell** اللذين توصّلا للاعتقاد بإمكانية بناء الرياضيات بمجملها من الصفر ابتداءً بالمنطق الأساسي ونظرية المجموعات فقط.

في عام 1901 كان فيرج على وشك نشر المجلد الثاني من عمل يحاول تطبيق ذلك بعنوان "العمليات الأساسية في الحساب"، لكن راسل

كتب له في الدقيقة الأخيرة معلناً عن اكتشاف لم يقوّض جهود فيرج فحسب بل هدّد أيضاً بتعريض بنيان نظرية المجموعات (**set theory**) للانهيار.

باعتبار المجموعات الرياضية هي مجموعات من الأغراض، فإذا كانت المجموعة **X** تحوي الغرض **y** نقول أن **y** عنصر من عناصر **X** حيث يكتب بالشكل التالي \(y \in X\) واي ينتمي لـ اكس)، وبالطبع فإن بعض المجموعات تشكل عناصر ضمن مجموعات أخرى فمثلاً مجموعة الكلاب الألزاسية هي بحد ذاتها عنصر ضمن مجموعة سلالات الكلاب ككل.

هل يعقل نظرياً أن تكون بعض المجموعات محتواة حتى ضمن نفسها؟ فكر باحثو نظرية المجموعات في ذلك الوقت بأن "مجموعة المجموعات جميعاً" لا بدّ أن تكون مثالاً على مجموعة محتواة ضمن ذاتها، لكن مفارقة راسل كانت عبارة عن تناقض بسيط يستند إلى فكرة: لتكن **X** مجموعة مكونة تحديداً من تلك المجموعات التي ليست محتواة ضمن ذاتها، عندئذٍ هل ستكون **X** محتواة ضمن ذاتها؟ فكّر في ذلك! في كلتي الحالتين ستواجه تناقضاً.



برتراند راسل

لم تكن مفارقة راسل هي المفارقة الأولى المنبثقة عن نظرية المجموعات، فكانتور نفسه اكتشف واحدة في الواقع عندما فكر بحجم مجموعة المجموعات جميعاً. لكن مفارقة راسل وصفت ببساطة بالمدمّرة فقد أفضت بشكل حتمي لخلاصة وجود خطأ جسيم في نظرية

المجموعات الخاصة بكانتور.

بقيت نظرية المجموعات في مرحلة الاضطراب تلك خلال العقدين الأوليين من القرن العشرين حيث كان حل مفارقة راسل هو التحدي الرئيسي، وقد حاول حلها عدة أشخاص دون أن يوفقوا ابتداء بفيرج الذي تسرع في كتابة تعديل بدراسته؛ وشمل ذاك الفيلسوف لودفيغ ويتنشتاين **Ludwig Wittgenstein** في عام 1923.

ثم وجد راسل نفسه طريقة للحل حيث عزم بمساعدة ألفرد نورث وايتهيد **Alfred North Whitehead** على تجربة ما لم يتوصل إليه فيرج ألا وهو تسخير المنطق ونظرية المجموعات لتشكل أساساً راسخاً للرياضيات بأكملها، فقد بيّن عملهما ذو المجلدات الثلاثة "برينسيبا ماثماتيكا" الذي نشر بين عامي 1910 و1913 كيفية بناء الأعداد والعناصر الأخرى في الرياضيات بدءاً من الصفر فقط باستخدام المجموعات والمنطق. وقد اشتهر عن ذلك لزوم الوصول للصفحة 86 من المجلد الثاني لإعداد المقومات اللازمة لإثبات أن 1+1=2، مصحوباً بتعليق "إن الطرح أعلاه قلما يفيد".

لقد أدرك راسل ووايتهيد ضرورة التزام حذر أكبر بشأن ما يمكن عدّه "مجموعة رياضية" حيث أنها تختلف عن "مجموعة أغراض" كما عُرّفت بسذاجة في عهد كانتور، وقد أدى الطريق لحل مفارقة راسل إلى صياغة تعريف أكثر تحديداً للمجموعة فلم يعد يسمح بعدّ العناصر السخيفة مثل عنصر **X** الخاص براسل ومجموعة المجموعات كمجموعات في نهاية المطاف ولم يعد يسمح بجعل مجموعة محتواة ضمن نفسها.

تمثل الحل بالتوسع في ترتيب المجموعات فخصّص لكل مجموعة مستوى بحيث يسمح فقط باحتواء المجموعات ذات المستويات الأدنى كعناصر ضمنها، ويعرف هذا النوع من الأنظمة بنظرية الأنواع (**type theory**) حيث ما تزال تفرعاتها ذات أهمية اليوم خاصة في علم الحاسوب. مع ذلك استمر البحث عن أساس للرياضيات أكثر تحرراً وأقل إرهاقاً.

استطاعت النسخة القديمة من نظرية المجموعات ان تستوعب مسألة اللانهاية، لكنها طرحت مفارقات مربكة

تمّ التوصل للحل في النهاية بالاعتماد على عمل إيرنست زيرميلو **Ernst Zermelo** الذي كان يبحث في نظرية المجموعات منذ بداية القرن، وفي عام 1922 اكتشف ابراهام فرانكيل **Abraham Fraenkel** وثوراف سكوليم **Thoraf Skolem** كيفية وضع اللمسة الأخيرة الحاسمة على بحثه.

ما وجدوه كان عبارة عن قائمة واضحة من البديهيات (**axioms**) التي تتحكم بسلوك المجموعات المجردة، ويعرف هذا النظام بـ **ZF** نسبة لزيرميلو وفرانكيل؛ وهو نظام انسيابي منطقياً بحيث أن مجموعات الأشياء في الحياة العادية (كسلالات الكلاب) لا تلائمه بسهولة شديدة (دون تعديلات على الأقل).

هذا النظام كوناً مؤلفاً كلياً من مجموعات مجردة يمكن أن تكون محتواة ضمن بعضها البعض لكنها ليست مؤلفة من عناصر أكثر أساسية، وهو المطلوب تماماً فيما يتعلق بغايات الرياضيات حيث كان قوياً بما يكفي لدعم عالم اللانهايات برمته الخاص بكانتور وفي الوقت ذاته ضعيف بما يكفي لتفادي المفارقات المخيفة التي وجدها مع راسل.

بديهية الاصطفاء

إن الهدف من الأنظمة البديهية مثل نظام **ZF** أو نظام راسل ووايتهيد هو توصيف الرياضيات بمجملها أو على الأقل جزءاً منها انطلاقاً من عدد صغير أو افتراضات أساسية. وقد قدم "برينسيبا ماثماتيكا" الطريقة لبناء الرياضيات من نظام **ZF**، وما تزال هذه الرؤية لنظرية المجموعات تدعم كامل المادة تقريباً في يومنا هذا، أي أن كل الأعداد وافتراضياً كل عنصر رياضي يمكن بناؤه ضمن كون يعتمد على نظرية المجموعات أسس له نظام **ZF**.

إذاً هل أثبت نظام **ZF** للمرة الأولى والأخيرة أن كرونيكر وغيره من المشككين كانوا مخطئين؟ يبدو الأمر بالتأكيد وكأن لا نهايات كانتور استقرت أخيراً على أساس راسخ، لكن كما العادة بقيت هناك مسألة واحدة يكتنفها الغموض.

إن الهدف من العمل انطلاقاً من البديهيات كان جعل الرياضيات دقيقة بحيث يغدو بالإمكان برهنة ما ينجم عن طفرات الإيمان ونوبات الإلهام التي عادة ما تشكل جزءاً من عمل كل عالم رياضيات بشكل ملائم انطلاقاً من هذه القواعد الأساسية. وبالعودة لعام 1904 نجد أن زيرميلو عرّف مبدأً يتكرر استخدامه من قبل علماء الرياضيات (حتى دون أن يدركوا ذلك)، لكن على ما يبدو لم يناسب هذه اللائحة تماماً؛ وقد لعب بالتحديد دوراً هاماً (رغم عدم الاعتراف به) في مطابقة كانتور الأصلية.

يقوم المبدأ على الشكل التالي: على فرض لديك مجموعة مؤلفة من مجموعات **A**، و**B**، و**C**، إلخ، وتريد خلق مجموعة أخرى باستخدام عنصر من **A** وعنصر من **B** وهكذا. يبدو من الواضح أن بإمكانك فعل ذلك، لكن في بعض الأحيان لا توجد طريقة واضحة لعزل عناصر محددة من **A**، و**B**، و**C**، إلخ، فقد لا تكون لديك قوائم واضحة بتلك العناصر، وبالطبع قد يكون ثمة عدد لا نهائي من تلك المجموعات.

في حال وجود قاعدة يمكن استخدامها لاختيار عنصر من كل مجموعة لن يكون هناك مشكلة؛ فإن كانت المجموعات **A**، و**B**، و**C**، إلخ لأزواج من الأحذية، عندها يسمح لك نظام **ZF** بالقول "نشكّل مجموعة جديدة باختيار الفردة اليسرى من كل زوج" بحسب تناظر راسل. لكن إن كانت الأزواج لجوارب لا يمكن التمييز بينها ويوجد لديك عدد لا نهائي منها فلا توجد طريقة واضحة للقيام بذلك، على الأقل بدون بديهية الاصطفاء التي تسمح لك دوماً بالقول "اختر جورباً واحداً من كل زوج".

إذا كنت تتعامل مع زوج من الأحذية، فبإمكانك حينها اختيار واحدة. وإذا كان لديه جارب فأنت حينها في مشكلة.

بول كوهين: بناء أكوانٍ مختلفة

لو كان **ZF** هو أساس الرياضيات ولو كانت بديهية الاصطفاء صحيحة (كما اعتقد معظم الناس) لكان من المفترض أن يكون بالإمكان إلى حدّ ما استنتاجها من **ZF**، وهذا بالضبط ما أمضى معظم علماء الرياضيات سنيناً محاولين القيام به لكن دون جدوى. لقد أصيبوا بالإحباط لأن بديهية الاصطفاء هي خاصية بسيطة بما يكفي، ولو كان **ZF** يفيد كأساس للرياضيات لأمكن حلّ مسائل رياضية أعقد بكثير بالرجوع إليها فقط؛ أو هذا ما اعتقده الناس.

بول كوهين

لقد توجّب بشدة إعادة النظر في ذلك الحل في عام 1931 عندما أثبت عالم المنطق الكبير كيرت غودل **Kurt Gödel** نظريات عدم الاكتمال الشهيرة، وكانت إحدى عواقب هذه النظريات أن **ZF** لا تشكل نظاماً مكتملاً؛ وهذا يعني في نهاية المطاف أنها لا تكفي لحسم كل المسائل الممكن تصورها حول المجموعات والأعداد. قد يبدو هذا مخيباً للآمال لكنه ليس فشلاً بالتحديد لـ **ZF**، فقد بيّن غودل استحالة تدوين أي نظام مكتمل وفي الآن ذاته قوي كفاية لتوصيف الحساب العادي.

في عام 1940 بيّن غودل أن بديهية الاصطفاء تتناغم مع **ZF** على الأقل بأنها لا تُدخل أي تناقضات إلى النظام، وكان انتصار بول كوهين يتمثل في اختراع الإقحام وهي تقنية فعالة لبناء أكوان جديدة من المجموعات التي تخضع لـ **ZF** لكن يمكن تفصيلها لتشبع حالات أخرى أيضاً. في عام 1962 استخدم كوهين الإقحام (**forcing**) لبناء كون يخضع لـ **ZF** لكنه لا يشبع بديهية الاصطفاء، وهذا نقيض ما أظهره غودل فهو يعني أن زيف بديهية الاصطفاء يتناغم أيضاً مع **ZF**. لذا قام كوهين بإثبات أن بديهية الاصطفاء مستقلة عن **ZF** مما يعني وجود توافق في حال الخضوع أو الإخفاق على حدّ سواء.

العالم دون اصطفاء

معظم الناس في أيامنا هذه يميلون لاستخدام نظام **ZFC** وهو **ZF** مع إضافة بديهية الاصطفاء، وما يزال هذا موضوعاً للدراسة اليوم. وقد وجدت العديد من المعايير المثيرة للاهتمام والتي تعادله منطقياً من ضمنها بعض المعايير الآتية بالجملة من أقسام أخرى من الرياضيات، وأحد تلك المعايير الهامة من منظور لانهايات كانتور (**Cantor's infinities**) هو مبدأ الانقسام الثلاثي الذي ينصّ على أنه بالنسبة لأي مجموعتين **A** و**B** فإما **A** أكبر من **B** أو **B** أكبر من **A** أو كلاهما بنفس الحجم. قد يبدو هذا جلياً لكن إن صحّ زيف بديهية الاصطفاء عندها يمكن العثور على مجموعات لامنتهية لا يمكن مقارنتها ببساطة.

إن بعض علماء الرياضيات يعارضون البديهية بالفعل بسبب طبيعتها اللابنائية، فهي تؤكد وجود مجموعة محددة دون ذكر كيفية الحصول عليها أو كيف هو شكلها؛ لذا من المؤكد أنها لم تكن لتروق لليوبولد كرونيكر. وبالإضافة لوجود أسباب إيديولوجية لمعارضتها، بعض الناس يثيرهم العالم الخالي من الاصطفاء لغرابته حيث يمكن ألا توجد عناصر رياضية عادية محددة وحيث أن التعاريف المتباينة لمعنى "المنتهي" قد لا تتوافق مع بعضها.

وهذا لا يعني أن بديهية الاصطفاء ذاتها لم تسفر عن عواقب مفاجئة، فمفارقة باناخ-تارسكي (**Banach-Tarski**) هي الحقيقة المقلقة التي تنص على أنه بإمكانك أخذ كرة ثلاثية الأبعاد واستخدام بديهية الاصطفاء لتشريحها لخمسة أجزاء ومن ثم تجميعها لتحصل على كرتين جديدتين كل واحدة منهما لها نفس حجم الكرة الأصلية تماماً. إن الأشياء الغريبة تحصل حتى في عالم الاصطفاء.

عن المؤلف

ريتشارد إلويس Richard Elwes

ريتشارد إلويس **Richard Elwes** هو كاتب وعالم رياضيات في ليدز. حاز على جائزة الكتاب الجدد لموقع "بلس" عام 2006، ومنذ ذلك الحين ينشر مقالات في مجلة "نيوساينتست"، ويتحدث عن الرياضيات في راديو القناة الرابعة. إضافة إلى تدريسه الرياضيات وإجراء البحوث، يستمتع إلويس أيضاً بالكتابة عن كل شيء انطلاقاً من السياسة إلى أفلام الرعب.

- التاريخ: 2018-02-07
- التصنيف: أسئلة كُبرى

#الكون #الفيزياء #رياضيات #اللانهاية #العلم

المصادر

- plus.maths
- الصورة

المساهمون

- ترجمة
  - سوسن شحادة
- مُراجعة
  - همام بيطار
- تصميم
  - علي كاظم
- نشر
  - مي الشاهد