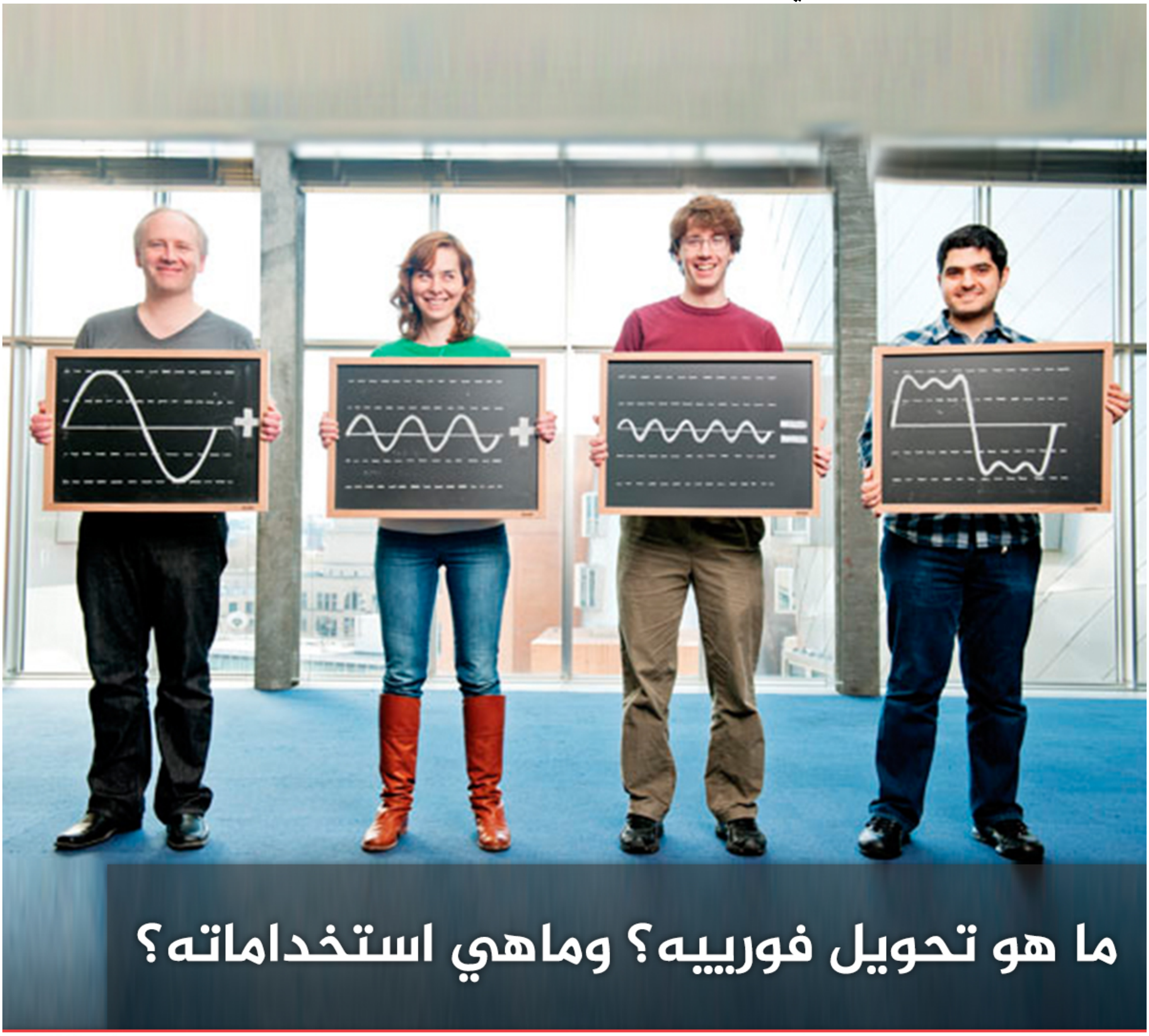
ما هو تحويل فورييه؟ وماهي استخداماته؟



عملية تقسيم إشارة معقدة إلى موجات بسيطة، ومعرفة العدد اللازم من الموجات، هي تحويل فورييه.

تقوم الفلسفة الرئيسية وراء مبدأ تحويل فورييه **Fourier Transform**، على تقسيم كل إشارة يمكن تخيلها تقريباً إلى مجموعة موجات بسيطة. (فورييه عالم فرنسي، لذلك يقرأ اسمه فورييه وليس فورير).

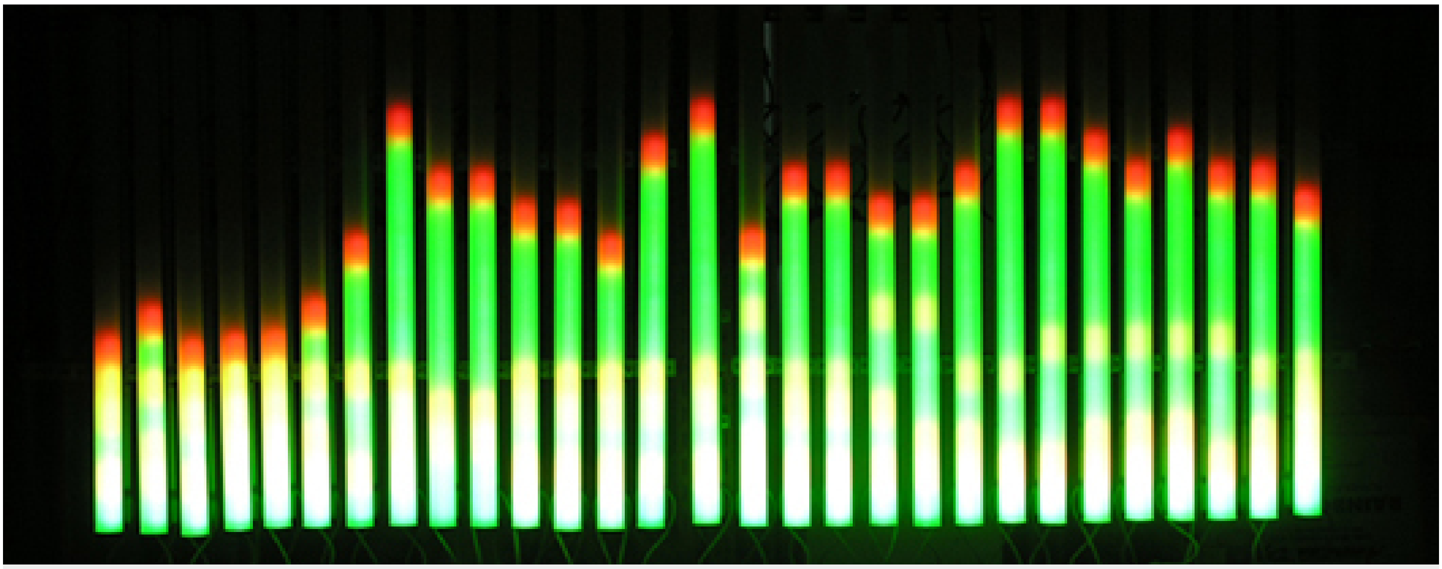
يأخذ تحويل فورييه (**FT**) إشارة ويعبر عنها من خلال ترددات الموجات التي تشكل تلك الإشارة. وعند التفكير في تطبيقات تحويل فورييه فإن أول ما يخطر لنا هو الصوت.

إذا كان بإمكاننا رؤية الصوت، فإنه سيبدو كجزيئات هواء تقفز ذهاباً وإياباً بسرعة كبيرة. ولكن للغرابة، عندما نسمع الصوت، نحن لا نشعر بأن هناك هواء يتحرك ذهاباً وإياباً، بدلاً عن ذلك نختبر الصوت عن طريق تردداته **Frequencies**.

فعلى سبيل المثال، عندما يعزف شخص ما على مفتاح **C** الأوسط على البيانو، نحن لا نسمع بآذاننا عملية اهتزاز الوتر 261 مرة في الثانية (تردد **C** الأوسط)، بل نسمع فقط نغمة واحدة. وهنا تعتبر عملية اهتزازات الهواء بمثابة الإشارة **Signal**، أما النغمة فهي تحويل فورييه لتلك الإشارة.

تصميم مفاتيح البيانو (في الأسفل) مثل تحويل فورييه لصوت البيانو (في الأعلى).

بالنسبة للموجات الصوتية، فإن تحويل فورييه هو الطريقة الطبيعية للتفكير فيها، لأنه من الصعب علينا التفكير في ذلك بأي طريقة أخرى. فعندما نتخيل صوتاً أو نعزف على آلة موسيقية، يصبح سهلا علينا أن نفكر في نغمة الصوت بدلاً من الحركة الفعلية للهواء.



مثال على تحويل فورييه كما هو موضح في واجهة نظام الصوت.

في الحقيقة، عند تسجيل الصوت رقمياً، يكون بإمكاننا أيضاً تسجيل قوة الموجة الصوتية نفسها، وهذا هو ما يسمى بترميز **wav**، ولكن في هذه الأيام غالباً ما يُسجل تحويل فورييه بطريقة أخرى.

في كل لحظة هناك قائمة من مختلف الترددات تُسجل (كما في الصورة أعلاه). وهذا هو تقريباً ما يسمى بترميز **mp3** ـ مع الكثير من المبادئ الأخرى بالطبع التي لا يسمح لنا الوقت بذكرها ـ. وبمجرد أن تقوم مكبرات الصوت بتشغيل المقطع حتى يتحول تحويل فورييه إلى الإشارة الأصلية.


Copyright © Julian Brooks 2009

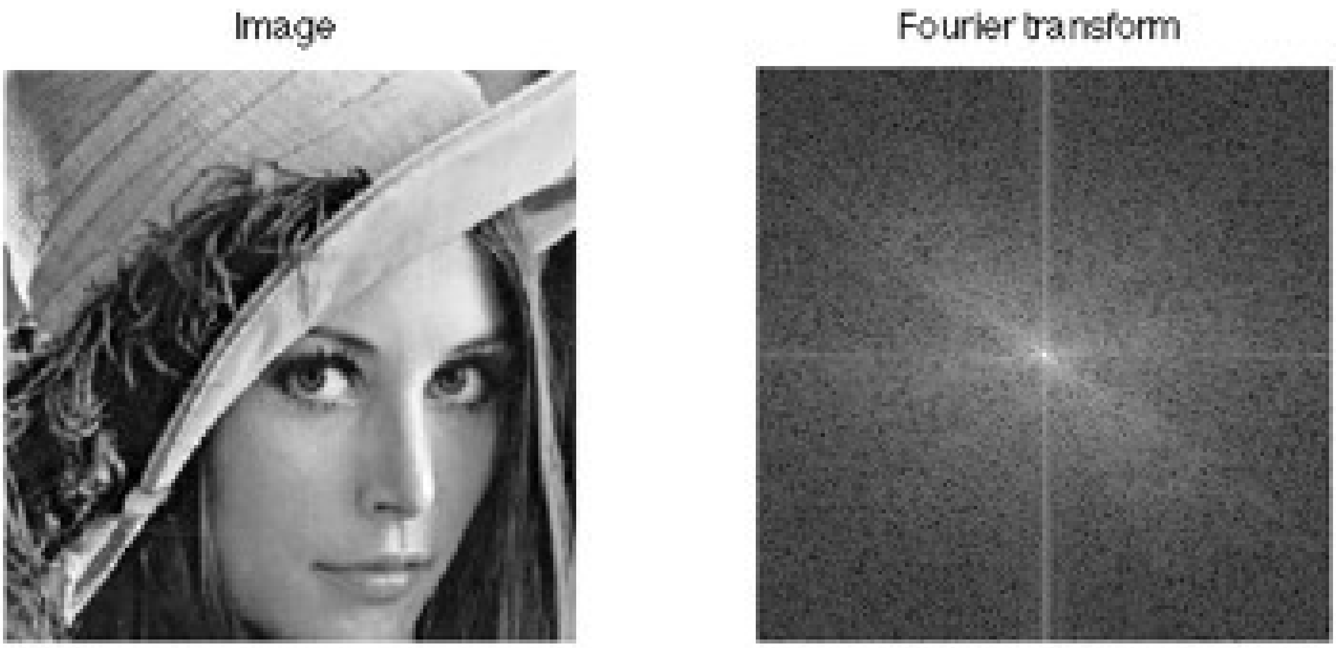
تقنيات التسجيل التناظرية القديمة analog recording techniques، مثل هذا الفونوغراف vinyl record، الذي يقوم بتسجل إشارة الصوت الأصلية وليس تحويل فورييه.

من السهل تصفية أو فلترة الصوت **filtering** في صيغة تحويل فورييه. فعلى سبيل المثال، عند ضبطك لموازن الصوت على نظام الصوت الخاص بك، (أي أنك تقوم بتغيير تضخيم الصوت **Bass** أو مقدار علو الصوت **Treble**)، فما تفعله حقاً هو جعل الجهاز يقوم بعملية مضاعفة الترددات المختلفة قبل إرسال الإشارة إلى مكبرات الصوت. لذلك عندما يتم تشغيل قاعدة الصوت، تُضاعف الترددات المخفضة بقيمة أكبر من الترددات العالية.

ومع ذلك، تظل الصوتيات أبسط تطبيق لتحويل فورييه. فالصور مثلاً نوع آخر من الإشارات، ولكن على عكس الصوت تعد إشارة الصور إشارة "ثنائية الأبعاد".

وبالمقابل هناك أيضاً نوع مختلف من تحويل فورييه، هو أيضاً ثنائي الأبعاد. فعندما طُبق ذلك لأول مرة على أجهزة الحاسوب وُجد أن أي صورة ليست ثابتة بشكل عشوائي إلى حد كبير، ويتركز معظم تحويل فورييه حول الترددات المنخفضة.

والسبب باختصار، لأن معظم الصور لا تتغير بسرعة على مسافات صغيرة، وبالتالي فإن الترددات العالية ليست مهمة. هذه هي الفكرة الأساسية وراء ضغط الصور الرقمية ذات الترميز "**jpeg**" ـ على الرغم من أن هناك غيرها من الحيل ذكية المستخدمة ـ.



صورة وتحويل فورييه لها. لاحظ أن معظم تحويل فورييه يتركز في المركز عند الترددات المنخفضة. وحذف تحويل فورييه بعيداً عن مركز يوفر الكثير من البيانات، ولا يُلحق الكثير من الضرر للصورة. وهذا ما يسمى بـ مرشح الترددات المنخفضة low-pass filter.

حقيقة ممتعة ومثيرة للاهتمام: صورة المرأة في القبعة تسمى "لينا" وهي واحدة من المعايير الأكثر شيوعاً في اختبارات معالجة الصور.

وهي النصف العلوي من صورة شخص بالغ، وعلى الرغم من أنه قد يبدو غريباً أن علماء الحاسوب يستخدمون هذا النوع من الصور، فعلى الأرجح يرجع ذلك إلى أن معظم طلاب علوم الحاسوب ليس لديهم الكثير من الخبرة في العثور على أي نوع آخر.

وفي حين أن التكنولوجيا الرقمية قد ساهمت في انفجار العديد من استخدامات تحويل فورييه، إلا أنها ليست الاستخدامات الوحيدة. ففي كل من علوم الرياضيات والفيزياء سوف تجد أن تحويل فورييه يقف خلف كواليس "كل شيء"، فعندما يتعلق الأمر بالموجات، وهو الغالب في كثير من الأحيان، فتأكد أن تحويل فورييه لن يكون بعيداً عنها.

فعادةً ما يكون من السهل وصف الأشياء كموجة واحدة، بسيطة، مثل بندول الساعة أو كرة واحدة تقفز باتجاه معين. وفي كثير من الأحيان، يكون من الممكن تقسيم النظم المعقدة إلى موجات بسيطة تقريباً، للنظر في كيفية سلوك تلك الموجات بشكل فردي، ومن ثم لإعادة بناء سلوك النظام ككل. وبالأساس، يكون من السهل علينا التعامل مع جيب الزاوية "**sin(x)**" مثلاً، ولكن من الصعب التعامل مع دالة غير معروفة تماماً **f(x)**.

يتنقل الفيزيائيون بين الحديث عن الدالات وتحويلات فورييه الخاصة بها، لدرجة أنهم بالكاد يرون الفرق. فعلى سبيل المثال، ولأسباب غير واضحة، في ميكانيكا الكم يعد تحويل فورييه لموقع جسيم، هو عزم **momentum** ذلك الجسيم.

ونظرياً، عندما يمتلك جسم الكثير من الزخم والطاقة فإن موجته تكون ذات تردد عالٍ، عدا عن امتلاكه الكثير من الموجات التي تتحرك ذهاباً وإياباً. ويعد تطبيق فورييه في ميكانيكا الكم واحداً من أكثر الطرق المباشرة لاشتقاق مبدأ الشك للعالم هايزنبرغ **Heisenberg Uncertainty principle**، ويظهر تحويل فورييه أيضاً في أجهزة الحاسوب الكمومية **quantum computers**.

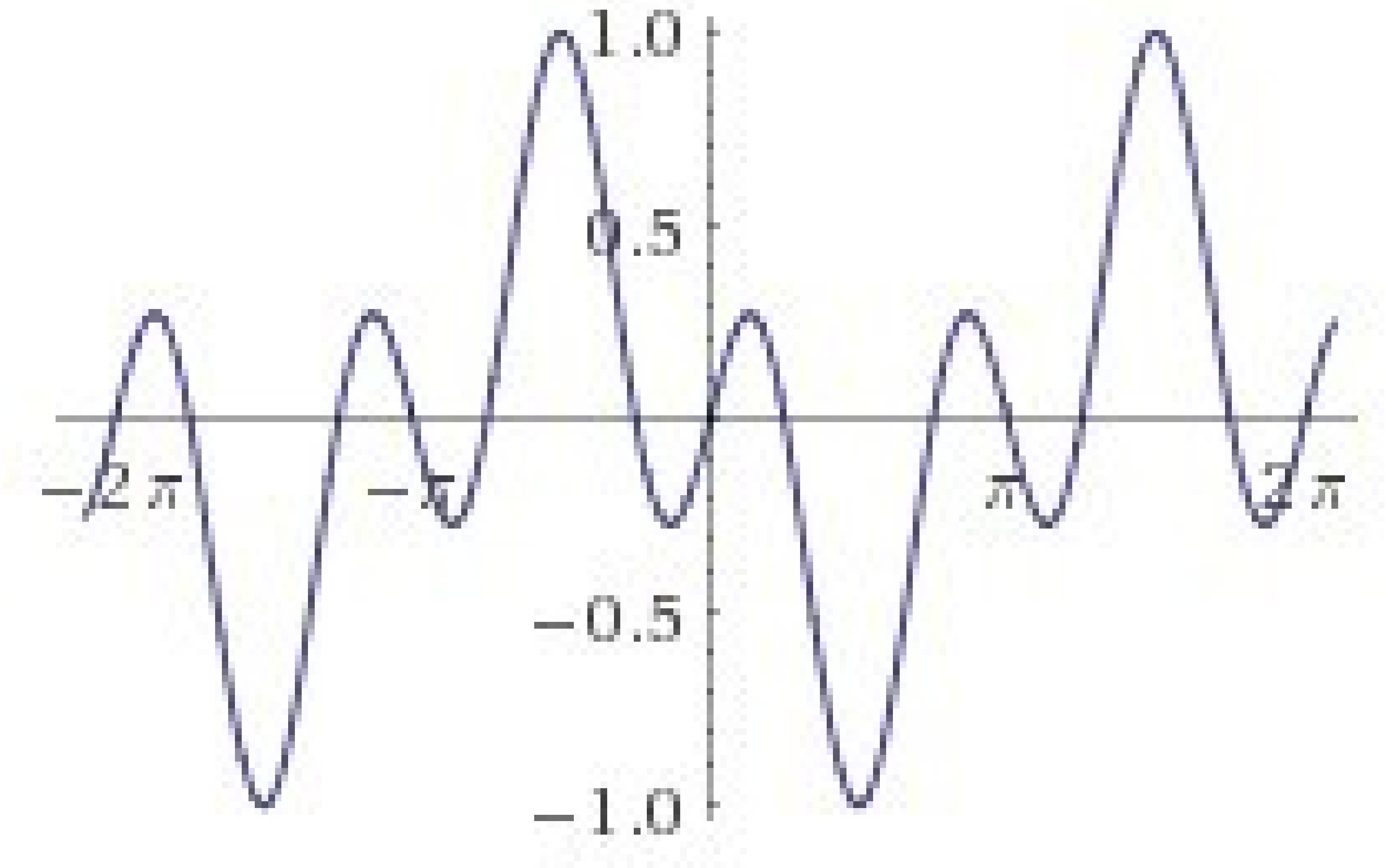
يميل علماء الرياضيات إلى أن يكونوا أكثر حماساً للخصائص الرياضية المجردة لتحويلات فورييه أكثر من الخصائص البديهية. وهناك الكثير من المشاكل التي يصعب أو يكاد يكون من المستحيل حلها، تصبح أكثر سهولة بعد تحويل فورييه.

ولكن العمليات الحسابية على الدوال، مثل المشتقات **derivatives** أو الالتفاف **convolutions** في الرياضيات، تصبح أكثر يسراً على الجانب البعيد من تحويل فورييه، حتى أنه في كثير من الأحيان، يجعل تحويل فورييه كل شيء أسوأ.

رياضياً: تحويل فورييه هو بالطبع تعبير رياضي عميق. فإذا كان لديك دالة **f**، تكرر نفسها كل فترة **2π**، فيمكنك التعبير عنها كمجموع موجات جيب الزاوية **Sine** وجيب تمام الزاوية **Cosine**:

(\(f(x) =\sum_{n=0}^{\infty} A_n sin(nx)+B_ncos(nx)\)

سيتضح لك أن إيجاد المعاملات **A's** و**B's** سهل إلى حد ما. لامتياز دوال الجيب وجيب التمام بخاصية التعامد **orthogonality**.



f(x) = sin(x)cos(2x) إن التعامد بين دوال الجيب وجيب التمام هو تعبير عن حقيقة أن عملية ضرب الجيب بجيب التمام بترددات مختلفة يُنتج دالة بفترات موجبة وسالبة متساوية (أي أن القيمة المتوسطة للدالة تساوي صفر).

int_0^{2\pi} \cos (nx) \sin (mx)dx=0 \)\)\

\(\int_0^{2\pi} \cos (nx) \sin (mx)dx= \begin{cases} \pi & \quad \text{,m=n}\\ 0 & \quad \text{,m } \neq{n } \\
(\{\end{cases

int_0^{2\pi} \sin (nx) \cos (mx)dx= \begin{cases} \pi & \quad \text{,m=n}\\ 0 & \quad \text{,m } \neq{n } \\\)\
(\{\end{cases

والآن، إذا كنت ترغب في إيجاد \(B_3\) على سبيل المثال. اضرب كلاً من طرفي المعادلة بـ **cos(3x)**، ومن ثم قم بإجراء التكامل على طرفي المعادلة خلال المجال من صفر إلى **2π** كما يلي:

f(x) =\sum_{n=0}^{\infty} A_n sin(nx)+B_ncos(nx) \))\
\(\Rightarrow f(x)cos(3x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n sin(nx) cos(3x)+B_ncos(nx)cos(3x)\)
\(\Rightarrow \int_ 0^{2\pi } f(x)cos(3x)dx= \int_ 0^{2\pi } [{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n sin(nx)
(\ cos(3x)+B_ncos(nx)cos(3x)]} dx
(\ sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_ 0^{2\pi } sin(nx) cos(3x)dx+B_n \int_ 0^{2\pi } cos(nx)cos(3x)dx\ =)\

$$B_3 \int_0^{2\pi} \cos(3x)\cos(3x)dx=$$

$$\pi B_3=$$

وعند إجرائك هذه الحسابات لجميع قيم **A's** و **B's** سوف تستنتج أن القانون العام للمعاملات هو:

$$A_n =\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

و

$$B_n =\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

ويمكنك أيضاً الاستفادة من معادلة أويلر **Euler’s equation** عن طريق تحويل صيغتها: $e^{i\theta}= \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ إلى صيغة أخـرى باسـتخدام فـورييه: $f(x)= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{inx}, C_n =\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}dx$ حيث:وإذا قمت بزيادة الفترة الزمنية من [0, 2π] إلى (-∞, ∞) سوف تحصل على:

$$f(x)=\int \hat{f}(n)e^{i 2 \pi nx}dn$$

و

$$\hat{f}(n)=\int f(x)e^{i 2 \pi nx}dx$$

فبدلاً من C_n لديك $\hat{f}(n)$ وبدلاً من معادلة المجموع أصبح لديك معادلة تكامل، ولكن الفكرة الأساسية بقيت كما هي $\hat{f}(n)$، ويدل على تحويل فورييه لدالة f .

وهنا سنتعرف على شغف علماء الرياضيات بتحويل فورييه بشكل كبير لدرجة أنهم ودّوا لو يقومون بتسمية المليارات من أطفالهم، على شكل متسلسلة فورييه: "الطفل0، الطفل1،........، الطفلn".

فإذا كنت تبحث في حلول المعادلات التفاضلية **differential equation**، فيمكنك حل العديد منها بسرعة إلى حد ما باستخدام تحويل فورييه. فعند تطبيق تحويل فورييه على المعادلة التفاضلية تتحول المشتقات إلى عمليات ضرب بواسطة المتغيرات وإليك كيفية إجراء ذلك:

$$\begin{aligned}
&\int f'(x)e^{-2\pi inx}dx \\
&= -\int f(x)\frac{d}{dx}\left[e^{-2\pi inx}\right]dx + f(x)e^{-2\pi inx}\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= -\int f(x)\frac{d}{dx}\left[e^{-2\pi inx}\right]dx \\
&= -\int f(x)(-2\pi in)\left[e^{-2\pi inx}\right]dx \\
&= 2\pi in\int f(x)e^{-2\pi inx}dx \\
&= 2\pi in\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

تطبيق تحويل فورييه على المعادلة التفاضلية تتحول المشتقات إلى عمليات ضرب بواسطة المتغيرات

وتصبح فجأة معادلتك التفاضلية كثير حدود **polynomial!** قد يبدو هذا مختصراً، ولكن عملية تغطية تحويل فورييه بشكل عام عبارة عن معركة خاسرة، فهو موضوع ضخم مع تطبيقات لا حصر لها، والكثير منها معقد جداً. فبالنهاية الرياضيات حقل كبير جداً.

- التاريخ: 2017-06-02
- التصنيف: اسأل فلكي أو عالم فيزياء

#الصوت #الرياضيات #تحويلات فورييه #فورييه

المصطلحات

- **الحواسيب الكمومية (Quantum computers)**: هي الحواسيب التي تعتمد على مبادئ ميكانيك الكم وظواهره مثل التراكب الكمي والتشابك الكمي لمعالجة البيانات. تُقاس البيانات في الحواسيب التقليدية بواحدة البت، أما في الحواسيب الكمومية فتقاس بالكيوبت Qubit
- **الأيونات أو الشوارد (Ions)**: الأيون أو الشاردة هو عبارة عن ذرة تم تجريدها من الكترون أو أكثر، مما يُعطيها شحنة موجبة.وتسمى أيوناً موجباً، وقد تكون ذرة اكتسبت الكتروناً أو أكثر فتصبح ذات شحنة سالبة وتسمى أيوناً سالباً

المصادر

- askamathematician

المساهمون

- ترجمة
  - ريم محمد
- مُراجعة
  - ريم المير أبو عجيب
- تحرير
  - معاذ طلفاح
  - أنس الهود
- تصميم
  - محمد نور حماده
- صوت
  - محمد بشير علي
- مكساج
  - محمد بشير علي
- نشر
  - مي الشاهد